

Complexité combinatoire et nombres inaccessibles

**Comprendre la complexité ?
Que nous apprend l'ordinateur sur nous-mêmes ?**

Préambule

Ce que propose Turing aux philosophes de son époque !

VOL. LIX. No. 236.]

[October, 1950]

MIND A QUARTERLY REVIEW OF PSYCHOLOGY AND PHILOSOPHY

I.—COMPUTING MACHINERY AND INTELLIGENCE

BY A. M. TURING

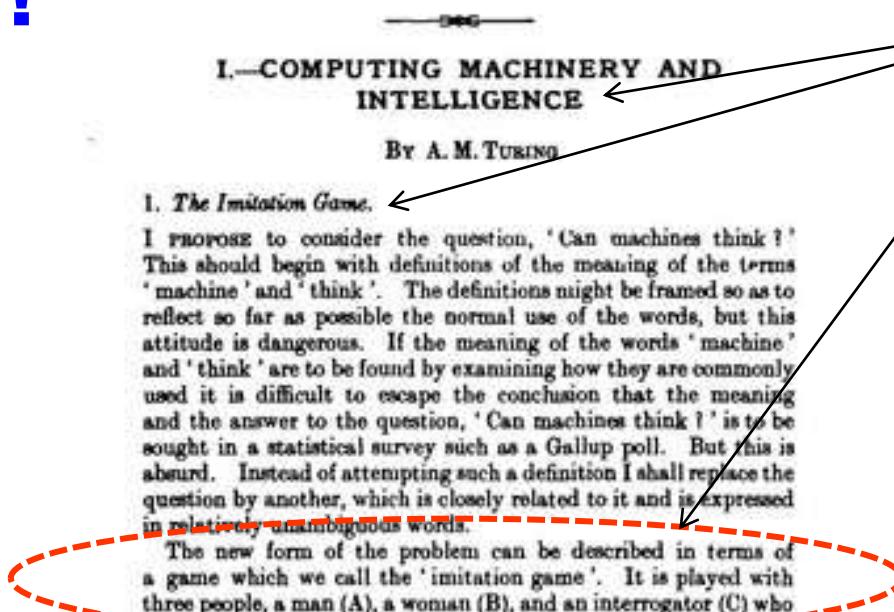
1. *The Imitation Game.*

I PROPOSE to consider the question, 'Can machines think?' This should begin with definitions of the meaning of the terms 'machine' and 'think'. The definitions might be framed so as to reflect so far as possible the normal use of the words, but this attitude is dangerous. If the meaning of the words 'machine' and 'think' are to be found by examining how they are commonly used it is difficult to escape the conclusion that the meaning and the answer to the question, 'Can machines think?' is to be sought in a statistical survey such as a Gallup poll. But this is absurd. Instead of attempting such a definition I shall replace the question by another, which is closely related to it and is expressed in relatively unambiguous words.

The new form of the problem can be described in terms of a game which we call the 'imitation game'. It is played with three people, a man (A), a woman (B), and an interrogator (C) who may be of either sex. The interrogator stays in a room apart from the other two. The object of the game for the interrogator is to determine which of the other two is the man and which is the woman. He knows them by labels X and Y, and at the end of the game he says either 'X is A and Y is B' or 'X is B and Y is A'. The interrogator is allowed to put questions to A and B thus:

C : Will X please tell me the length of his or her hair!
Now suppose X is actually A, then A must answer. It is A's

Une intelligence qui imite



COMPUTATION:

FINITE AND
INFINITE MACHINES

MARVIN L. MINSKY

Professor of Electrical Engineering
Massachusetts Institute of Technology

Turing award 1969

PREFACE

INTRODUCTION

Man has within a single generation found himself sharing the world with a strange new species: the computers and computer-like machines. Neither history, nor philosophy, nor common sense will tell us how these machines will affect us, for they do not do "work" as did machines of the Industrial Revolution. Instead of dealing with materials or energy, we are told that they handle "control" and "information" and even "intellectual processes." There are very few individuals today who doubt that the computer and its relatives are developing rapidly in capability and complexity, and that these machines are destined to play important (though not as yet fully understood) roles in society's future. Though only some of us deal directly with computers, all of us are falling under the shadow of their ever-growing sphere of influence, and thus we all need to understand their capabilities and their limitations.

It would indeed be reassuring to have a book that categorically and systematically described what all these machines can do and what they cannot do, giving sound theoretical or practical grounds for each judgment. However, although some books have purported to do this, it cannot be done for the following reasons: a) Computer-like devices are utterly unlike anything which science has ever considered—we still lack the tools necessary to fully analyze, synthesize, or even think about them; and b) The methods discovered so far are effective in certain areas, but are developing much too rapidly to allow a useful interpretation and interpolation of results.

Nous avons un modèle de calcul « réel » grâce à Turing – Von Neumann

Comment une machine peut-elle être « infinie » ?

Référence au livre de Wiener, *Cybernetics or Communication & Control in the animals and machines*

☞ Noter la nuance entre *Communication* et *Information* [Cf. Shannon]

Référence aux travaux de Gödel & Turing sur la limitation des formalismes, et donc des Programmes

☞ On ne peut pas démontrer la validité d'un programme, il faut EXPÉRIMENTER

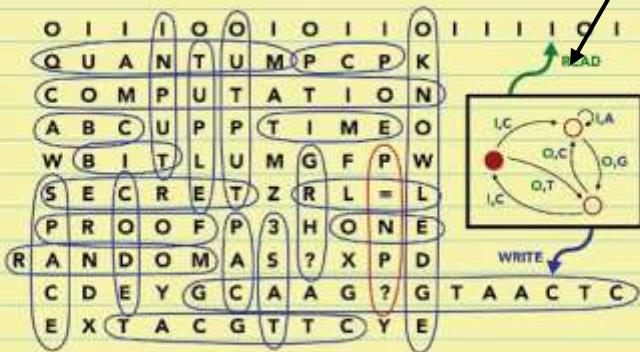
Deux mécanismes cruciaux à l'interface Hard/Soft naissent à cette époque :

- « Pile » de mémoire pour la récursivité
- Mémoire « virtuelle » infinie

MATHEMATICS + COMPUTATION

A THEORY REVOLUTIONIZING
TECHNOLOGY AND SCIENCE

Avi Wigderson



Un ouvrage récent, Turing Award 2023, sur la théorie du calcul

Les automates comme modèles de calcul universel

- ☞ Tous les programmes sont des automates
- ☞ 2 classes d'automates omniprésents :
Automates à états finis
Automates « infinis » avec pile de mémoire

Une mise en correspondance réversible Virtuel/Réel

- **L'univers des programmeurs** est un univers informationnel logique infini, fait de symboles [mots, verbes, nombres, phrases...] tels que les langages de programmation permettent de les représenter
- **L'univers de la machine** est un univers matériel fini de silicium « informé », de composants [ Transistors] rigoureusement organisés qui sert de substrat aux programmes sans lesquels il serait parfaitement inerte
- **Deux univers complémentaires indissociables en correspondance réversible [DUALITÉ]**

LE problème fondamental de cette « révolution conceptuelle »

- ↳ **Maintenir la cohérence** entre le monde virtuel infini des programmeurs et le monde réel fini de la machine
- ↳ Exemple : la mémoire dite « virtuelle » qui apparaît dès les années 1960 d'où ➤ **3 niveaux**
 - Adressage symbolique au niveau des **langages externes** des programmeurs, dont le 1^{er} ➤ FORTRAN
 - Adressage au niveau du **langage interne** de la machine, via le jeu d'instruction [langage dit d'« assemblage »]
 - Adressage physique au niveau de la circuiterie de la machine [en particulier → adressage des « caches », etc.]

Nombres inaccessibles et Complexité

**Comment mieux appréhender la
complexité**

Qu'est-ce qu'un nombre inaccessible ?

- ↳ Terminologie introduite par Émile Borel, dans ses ouvrages, *Le Hasard*, 1914, et *Les nombres inaccessibles*, 1952.
- ↳ Apparaissent dans *trois* domaines :
 - Physique statistique, avec Boltzmann ➔ Des nombres qui « *défient l'imagination* », dit-il !
 - En biologie avec la chimie des protéines, par exemple l'hémoglobine → Plus de 60 000 atomes **organisés**
 - En informatique avec les 1^{ers} ordinateurs, et a fortiori ceux d'aujourd'hui → 25 à 50 milliards de transistors dans les chips [entre 3 et 4 cm²] de la machine NVIDIA + Taille des mémoires [en Giga-octets → soit une capacité de codage de 256^{1 000 000 000}]

Pourquoi inaccessible ?

- ↳ Pour les singes dactylographes de Borel, la combinatoire est $50^{1\ 500\ 000}$, soit : $10^{2\ 548\ 455}$ livres de 400 pages, en notation usuelle [i.e. 50 signes].
 - Pas assez de ressource dans l'univers pour gérer un tel ensemble, même à l'échelle des unités de Planck
 - La probabilité de produire une œuvre littéraire est : ε ?!
- ↳ C'est la raison invoquée par Borel pour poser son principe [axiome] des probabilités négligeables :
 - ☞ A partir d'un certain seuil, le ε devient strictement = 0, c'est-à-dire une *certitude*.

En conséquence ☞ Probable # Incertain

Perception de la complexité /1

- ↳ Une notion vague, contre-intuitive, subjective, à partir de la complexité du « vivant », qui va progressivement s'expliciter tout au long des années 1930-1940
- ↳ Clarification avec le 6^{ème} problème de Hilbert, parmi les 23 ↗ l'axiomatisation du calcul des probabilités par A.Kolmogorov
 - Événements aléatoires en physique quantique
- ↳ **Quantité de calculs** nécessaires pour réaliser les 1^{ères} bombes atomiques H – Rôle majeur du mathématicien ***John von Neumann*** dans la prise de conscience

Perception de la complexité /2

- ↳ Pour von Neumann, trois aspects sont **évidents**, dès le départ :
 - **Nombre** d'opérations à effectuer
 - **Durée** des opérations → Temps de calcul
 - **Taille** mémoire de l'espace de travail nécessaire pour le calcul ➡ Ressources disponibles ? ➡ d'où **limites**
- ↳ Les jeux d'**Échecs** ou de **Go** sont souvent évoqués [surtout par des philosophes] comme étalon de mesure de l'intelligence et de la complexité, mais en termes de combinatoire, ça ne fait que :
 - ➔ 10^{120} pour les *Échecs* [1^{er} calcul par Claude Shannon]
 - ➔ 10^{170} pour le *Go*

Perception de la complexité /3

- ↳ Mais ça n'est ni une « mesure », ni une façon d'« étalonner » quelque chose qu'on se sait pas vraiment définir...
- ↳ Correction du « bruit » [désordre] dans un canal de communication → **2^{ème} théorème de Shannon**
 - Rend possible une ingénierie de l'aléatoire
- ↳ Le véritable étalon viendra avec la « machine » de Turing et son schéma de calcul → **Taille** du schéma
- ↳ Aujourd'hui, nous avons une théorie algorithmique très élaborée avec A.Kolmogorov, G.Chaitin, etc.
 - Voir **Handbook of Theoretical Computer Science**: Vol. A : *Algorithms & Complexity*, Van Leeuwen, 1994 – Travaux de Philippe Flajolet à l'INRIA, etc.

Échelle de complexité

- ↳ On cherche à caractériser la quantité de calcul à effectuer en fonction du nombre N d'éléments à manipuler pour résoudre un problème
 - ☞ Ne jamais oublier que les ressources sont finies
 - ↳ Notation en $O(N)$ qui donne un ordre de grandeur, soit
 - ☞ 3 niveaux
 - ➔ Linéaire $\rightarrow k \times N$
 - ➔ Polynomiale $\rightarrow k \times N^a$ avec a entier
 - ➔ Exponentielle $\rightarrow k \times a^N$, et plus [hyper-exponentielle] $\rightarrow a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^a}}}}$
- Avec le logiciel, et les structures avec des boucles récursives, il est très facile de fabriquer des hyper-exponentielles
- ☞ Nombres inaccessibles, donc en pratique **validation impossible**

Exemple d'un algorithme de tri de N éléments

→ Il s'agit de classer les N éléments en fonction d'une relation d'ordre quelconque mais explicite

e1	e2								eN
----	----	--	--	--	-------	--	--	--	--	----

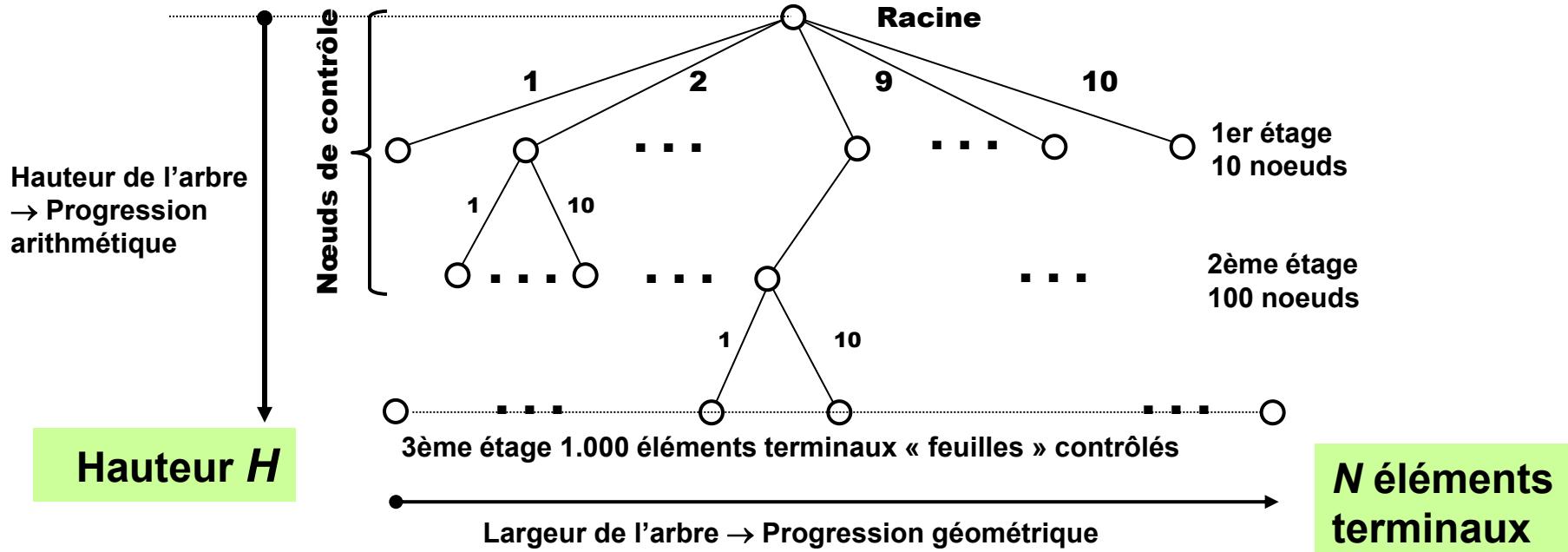
→ Le nombre de combinaisons possibles est exactement $N!$ ↗ une factorielle, soit selon la formule de Stirling :

$$n! \approx \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi \times n}$$

→ La complexité algorithmique du tri est : $O(N \times \log(N))$

Une structure des plus fondamentales

☞ Les arbres hiérarchiques



La hauteur H de l'arbre croit comme le
☞ Complexité sous contrôle

$$\log_{\text{Base}}(N)$$

Notion d'« ignorance définitive »

- ↳ Introduite par le mathématicien Nicolas Bouleau à partir de considérations combinatoires sur la génomique
 - 2 ouvrages : **Ce que nature sait**, 2021, et **Le hasard et l'évolution**, 2024
 - ☞ Il réfute le « Hasard » version Jacques Monod
- ↳ C'est une **réflexion profonde sur l'application des résultats de Gödel** qui montrent les limites du raisonnement par induction [i.e. faisant appel uniquement à l' ω dénombrable], limites qui deviennent évidentes avec l'informatique, i.e. Turing, puis Minsky dans les années 1960
- ↳ Argumentation fondée sur la complexité biologique des génomes, en particulier la complexité des phénomènes évolutifs → **Une argumentation qui se généralise sans difficultés dans d'autres domaines**

Qu'est ce que le « Hasard » ???

Le Calibre 89 présenté par Patek Philippe en 1989 : 1.728 composants, 33 complications horlogères, 9 cm de diamètre, 4 cm d'épaisseur, 1 kg, 5 ans de recherche



Nombre de possibilités de montage, si on opère au hasard : [Factorielle(1.728)], soit :

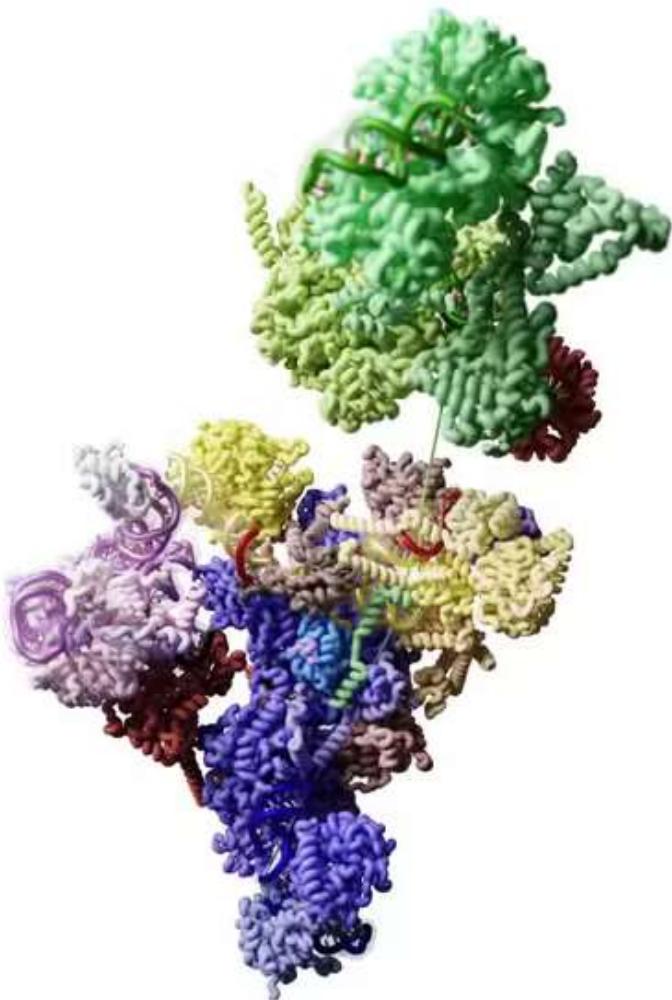
→ $\approx 1,07 \times 10^{4.646}$ via la formule de Stirling

→ Mais il n'y a que $\approx 5 \times 10^{80}$ atomes d'hydrogène dans l'univers connu (Estimation de Ch.Magnan, Collège de France) !!!



Un organisme humain : environ 75 à 100 mille milliards de cellules !!!

Exemple: le Splicéosome – Épissage des ADN



Voir l'article dans *Le Monde*, supplément *Science & Médecine*, du 6/11/2024

Ces protéines éphémères vitales pour la traduction ADN→ARN dans la machinerie cellulaire sont comparées à un assemblage dynamique d'un puzzle de 305 pièces.

En termes de combinatoire, ça correspond à un espace de cas d'assemblages possibles de $305!$ [une *Factorielle*]

Soit en ordre de grandeur, calculée avec la formule de Stirling, le nombre : 8×10^{626}

☞ Nombre qualifié d'« inaccessible » par Borel

Voir également le livre de Philippe Kourilsky, *Le jeu du hasard et de la complexité*, Odile Jacob, 2014, à propos du système immunitaire.

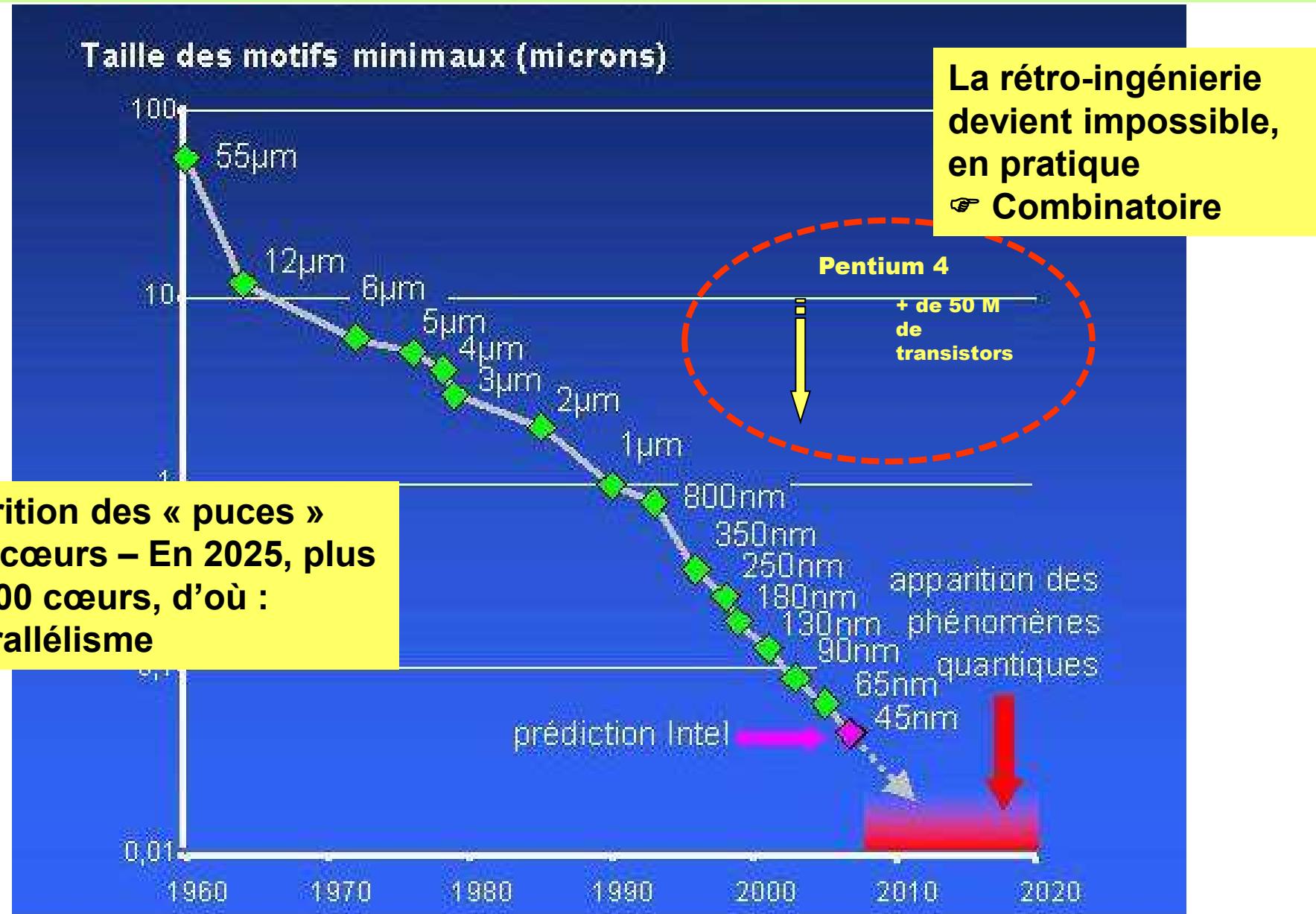
Voir également notre dialogue, édité en conclusion de mon livre, *Organisation et pédagogie de la complexité – Etudes de cas systémiques et Prospective*, chez ISTE-Wiley, 2022,

☞ Peut-on comparer l'ingénierie du vivant que les biologistes commence à entrevoir, et celle des ingénieurs de ces nouvelles sciences de l'information et de la complexité ?! Qu'est-ce que l'ordinateur nous apprend sur nous-mêmes ?

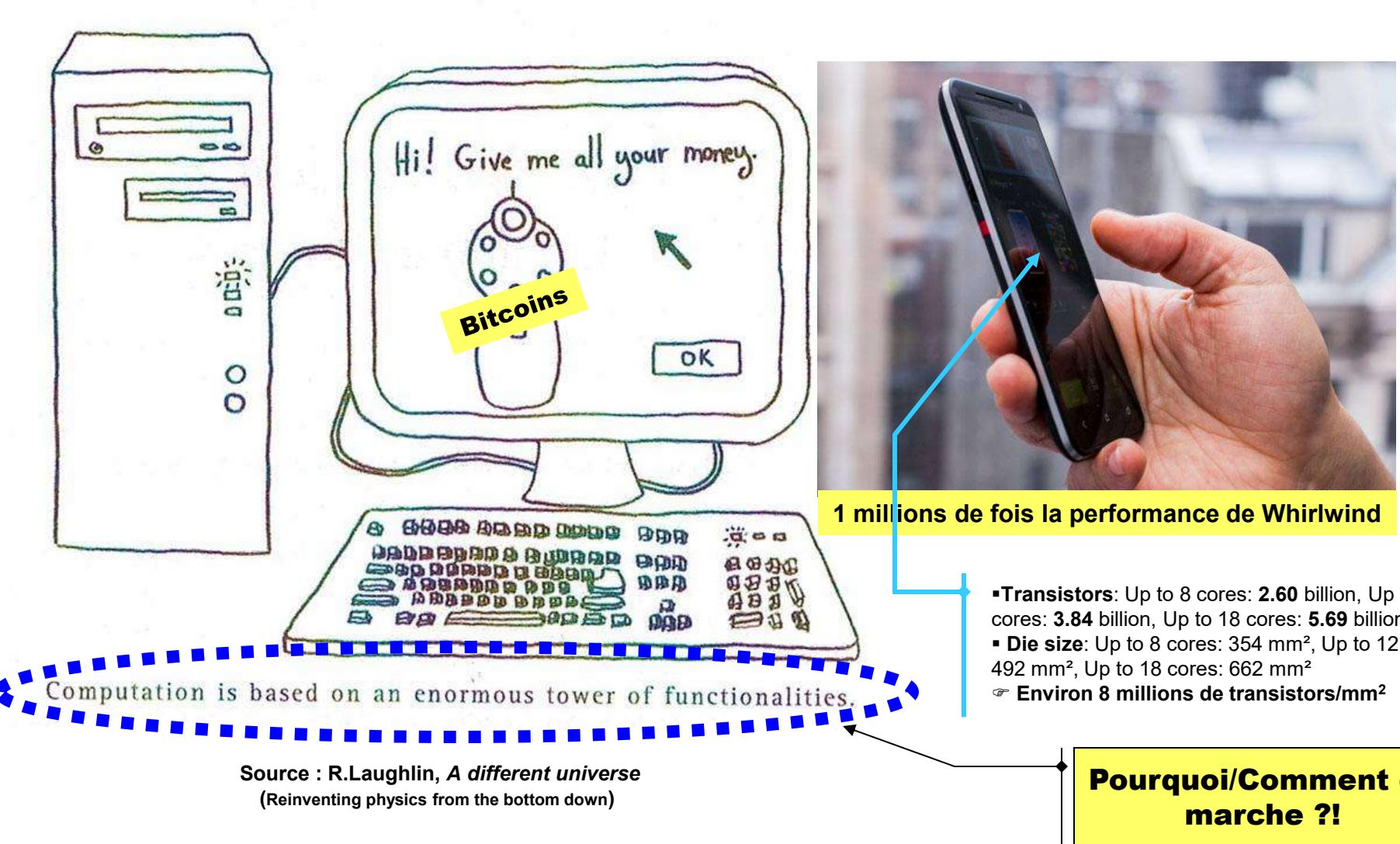
Clarifications apportées par l'ordinateur et les sciences de l'information

Cybernétique = science de la
communication ET du contrôle
[au sens anglais]

Une relecture de la « Loi » de Moore



Phénoménologie des sciences de l'information



1 millions de fois la performance de Whirlwind

- Transistors: Up to 8 cores: **2.60 billion**, Up to 12 cores: **3.84 billion**, Up to 18 cores: **5.69 billion**
- Die size: Up to 8 cores: **354 mm²**, Up to 12 cores: **492 mm²**, Up to 18 cores: **662 mm²**
- ☞ **Environ 8 millions de transistors/mm²**

Source : R.Laughlin, *A different universe*
(Reinventing physics from the bottom down)

Pourquoi/Comment ça marche ?!

Le symbole du monde de l'information : « Petite poucette » et son smartphone



☞ **Derrière ce simple geste, un univers immense,
« infiniment » complexe, ou jugé tel ...**

Un monde massivement interconnecté

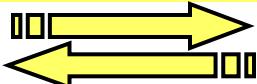
Interactions, parallélisme, synchronisation à l'échelle planétaire

Aléas



Langage externe LE

Protocole http



Infrastructures et ressources
informationnelles du WEB

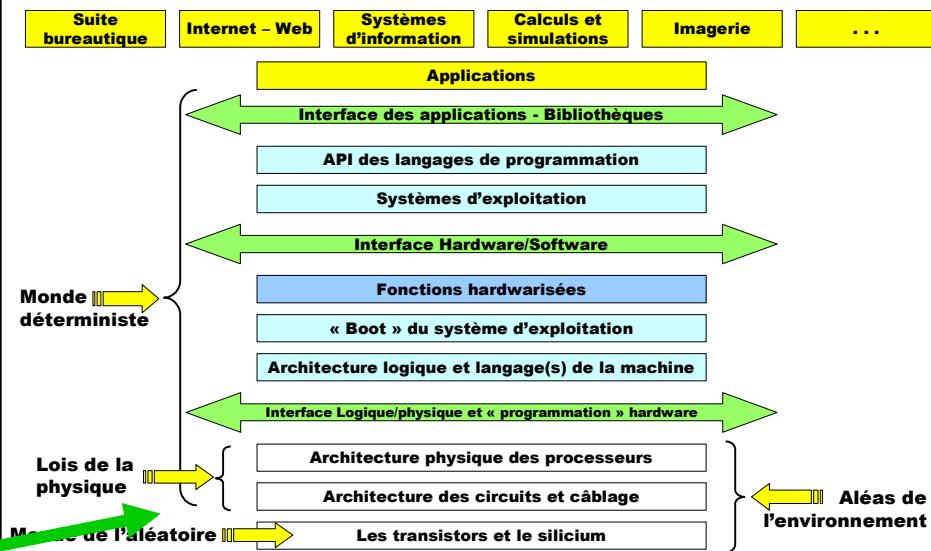
Mise à disposition
d'une bibliothèque
de programmes d'au
minimum 20 à 30
millions
d'instructions source
Voir > 100 millions

La face cachée de l'iceberg

Opérations à
effectuer
C /Créer
R /Rechercher
U /Modifier
D /Effacer
E /Exécuter

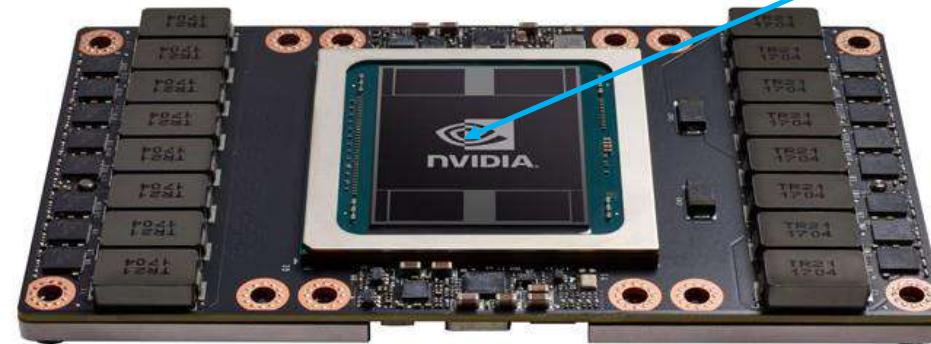
Langage interne LI ultime,
dans le silicium et l'organisation physique
du chip

Les niveaux d'abstraction d'un ordinateur moderne ...



La machine de NVIDIA QUADRO GV100

← → 30 cm



21 Milliards de transistors sur 815 mm²

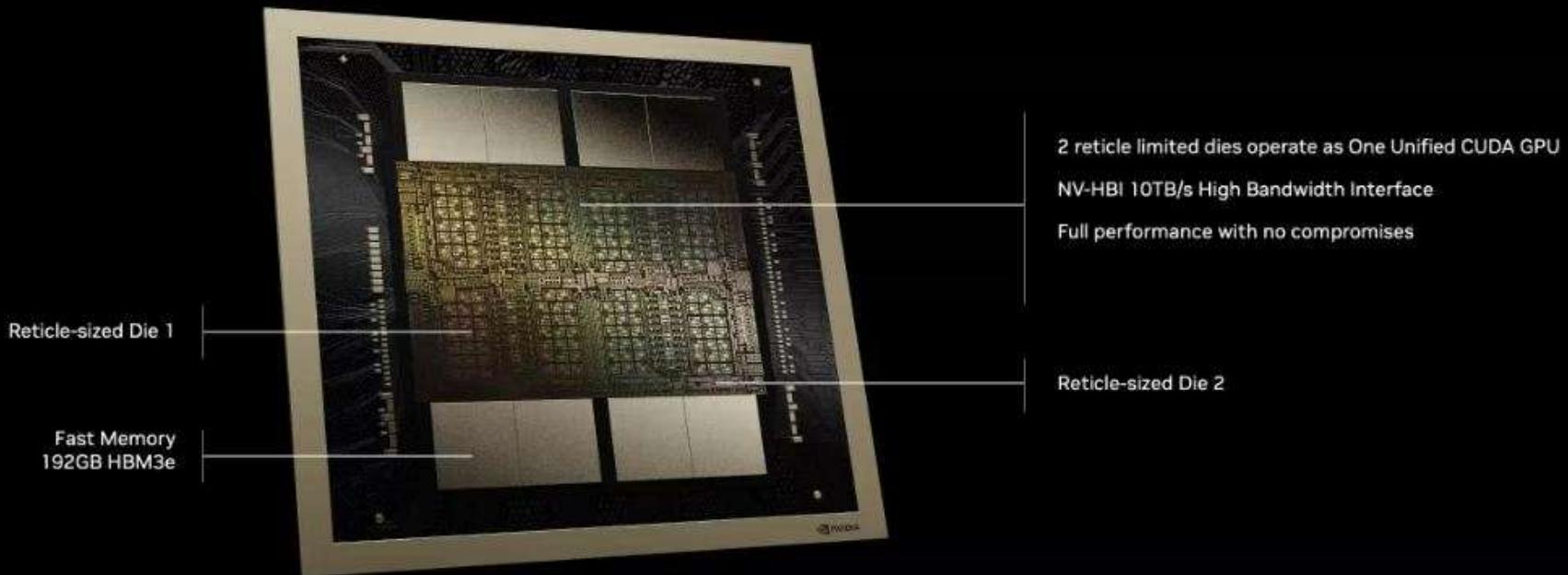
- 5 120 cœurs GPU [$\rightarrow (4+1) \times 1024$]
- Nombres flottants sur 32 et 64 bits
- 640 cœurs « Tensor » pour le calcul matriciel $\rightarrow a=b \times c + d$
- Mémoire GPU 16 Gigabits
- ECC \rightarrow Correction simple erreur + Détection double erreur

Horloge calibrée à 1,5 Gigahertz
Consommation électrique 300 W

Annonce NVIDIA juillet 2024

New Class of AI Superchip

The Two Largest Dies Possible—Unified as One GPU



NB : Échelle peta → 10^{15} opérations/sec

10 PetaFLOPS FP8 | 20 PetaFLOPS FP4
192GB HBM3e | 8 TB/sec HBM Bandwidth | 1.8TB/s NVLink

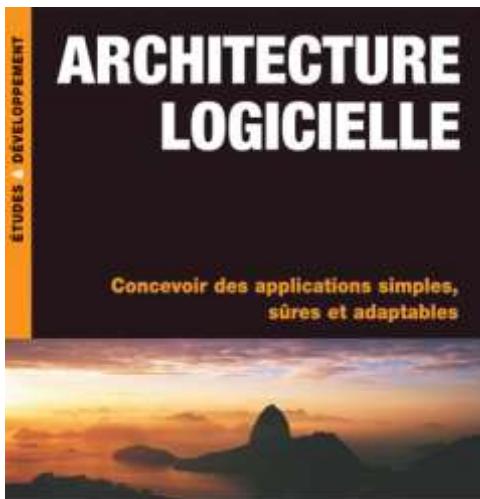
Built with 208 billion transistors, more than 2.5x the amount of transistors in NVIDIA Hopper GPUs, and using [TSMC's 4NP process](#) tailored for NVIDIA, Blackwell is the largest GPU ever built. NVIDIA Blackwell achieves the highest compute ever on a single chip, 20 petaFLOPS.



Organisation de la complexité

→ L'organisation de la complexité de ce type de systèmes ne doit rien au hasard, mais tout à l'intelligence et aux connaissances de leurs concepteurs

Pour ma part ➡



Jacques Printz

Préface de Yves Caseau



Incidents, catastrophes ... pédagogiques

Ariane 501, Juin 1996
&
Crowdstrike, Juillet 2024

Ariane 501 – 1^{er} Vol

Echec du tir pour UNE instruction défectueuse dans le logiciel de guidage inchangé depuis les derniers tirs d'Ariane 4

☞ **Seul l'environnement a changé**



Gérer le parallélisme à l'échelle planétaire ?



Origine de l'incident
→ **UNE mise à jour**
dans un logiciel de
sécurité en
interaction avec le
système
d'exploitation
Windows

Conditions to interact coherently

So that users of systems S1 and S2 can interoperate coherently with each other, it is necessary that:



If the distance between S1 & S2 is 1 000 KM, a basic interaction needs 7 milliseconds [Light speed limit]

→ S1 is aware of the resources of S2 which are accessible to him, in quality and quantity

Common Culture

→ S2 is aware of the resources of S1 which are accessible to him, in quality and quantity

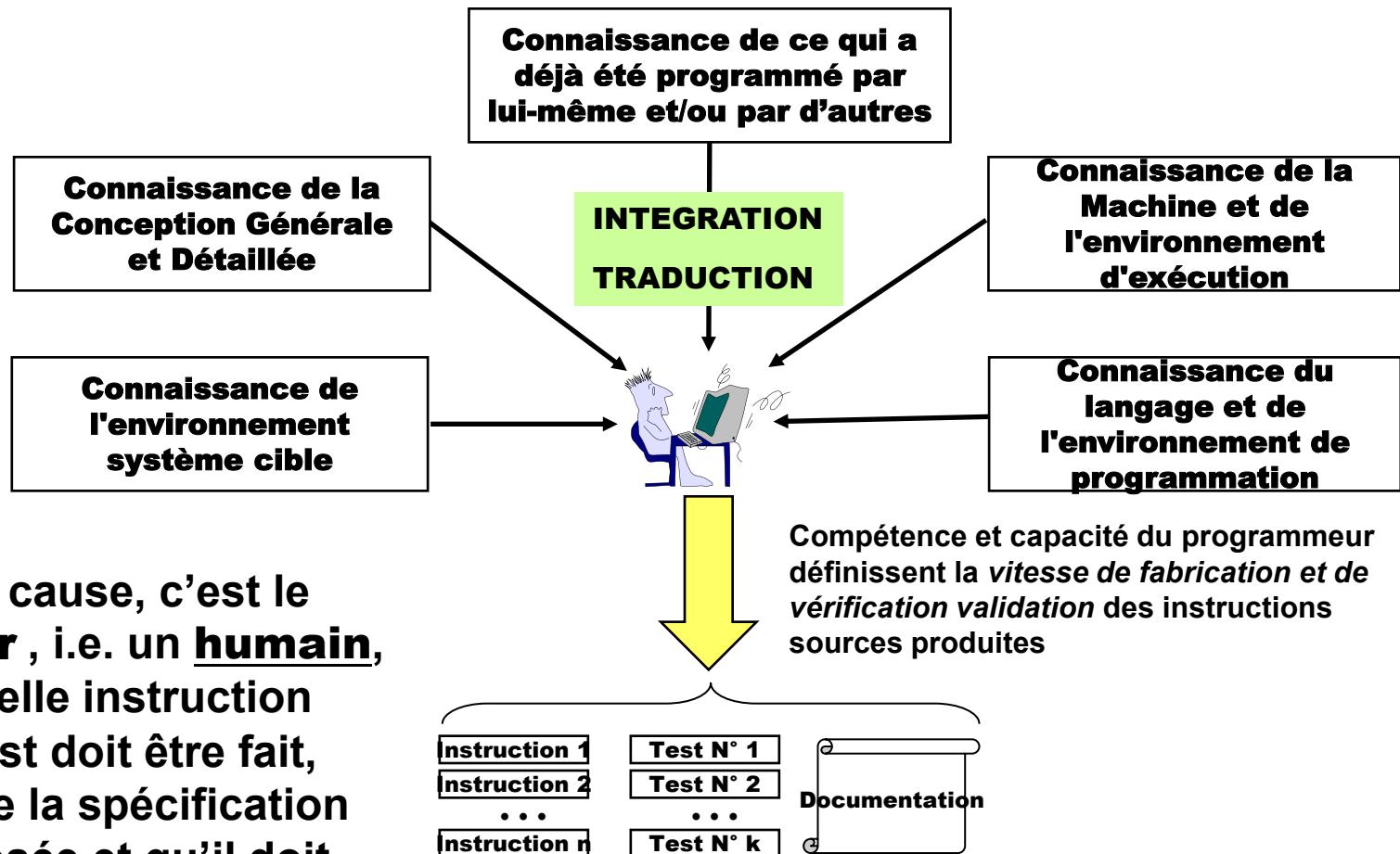
→ Hence the absolute necessity of a **model to exchange information** common to both, in a language independent of that of S1 and S2, but which must be able to be translated without loss of information into each of the languages specific to S1 and S2.

Quelles leçons tirer de ces 30 dernières années ?

**Omniprésence de la programmation
et de l'humain**

☞ **Nouvelle « matière »**

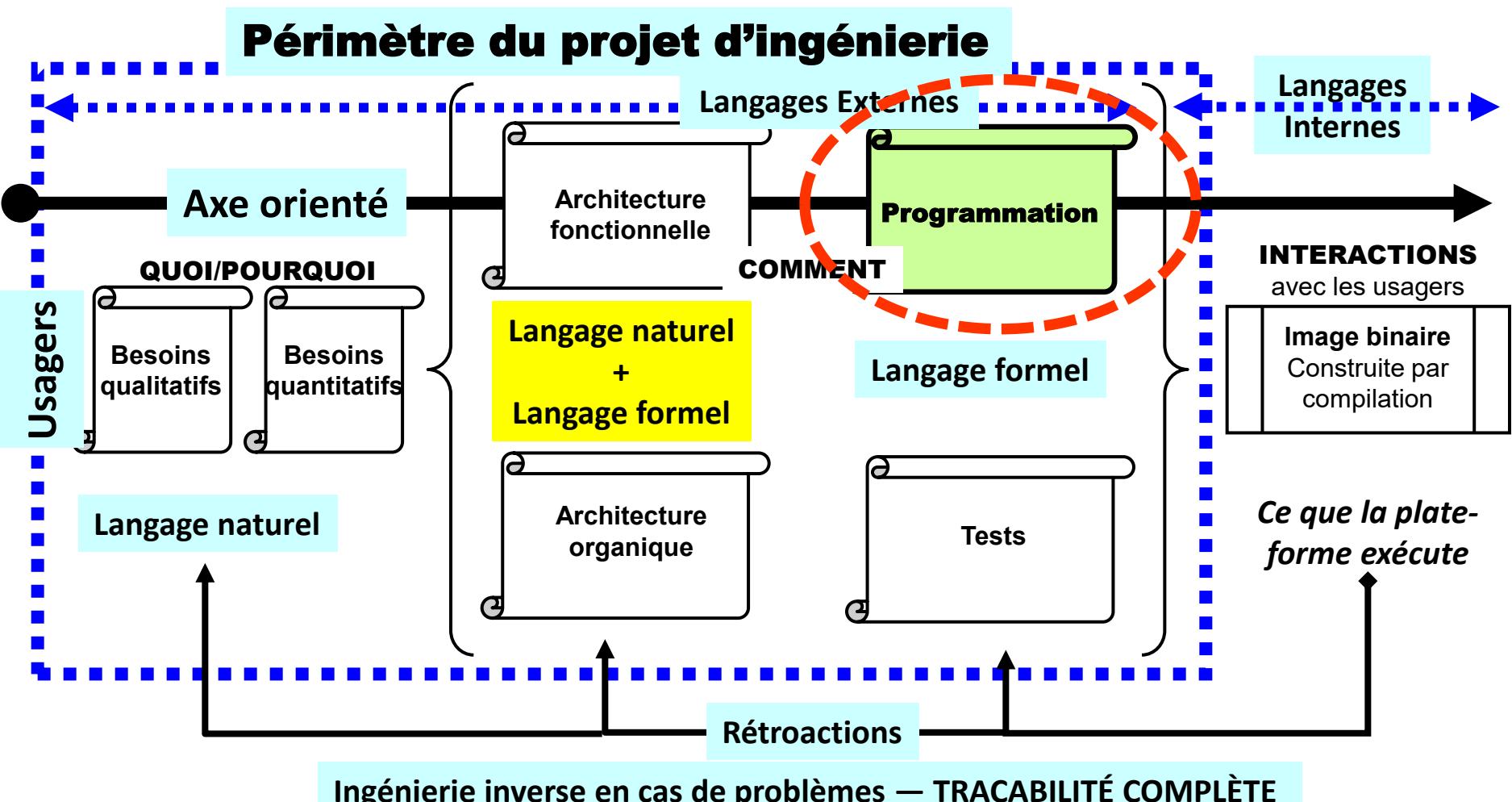
Acte de programmation → des *Décisions*



En tout état de cause, c'est le **programmeur**, i.e. un humain, qui **décide** quelle instruction choisir, quel test doit être fait, compte tenu de la spécification qui a été proposée et qu'il doit « traduire »

☞ Dans un **contexte projet**

Processus de construction des textes informatiques



Des milliers, voire dizaines de milliers de personnes, et pas que des programmeurs...

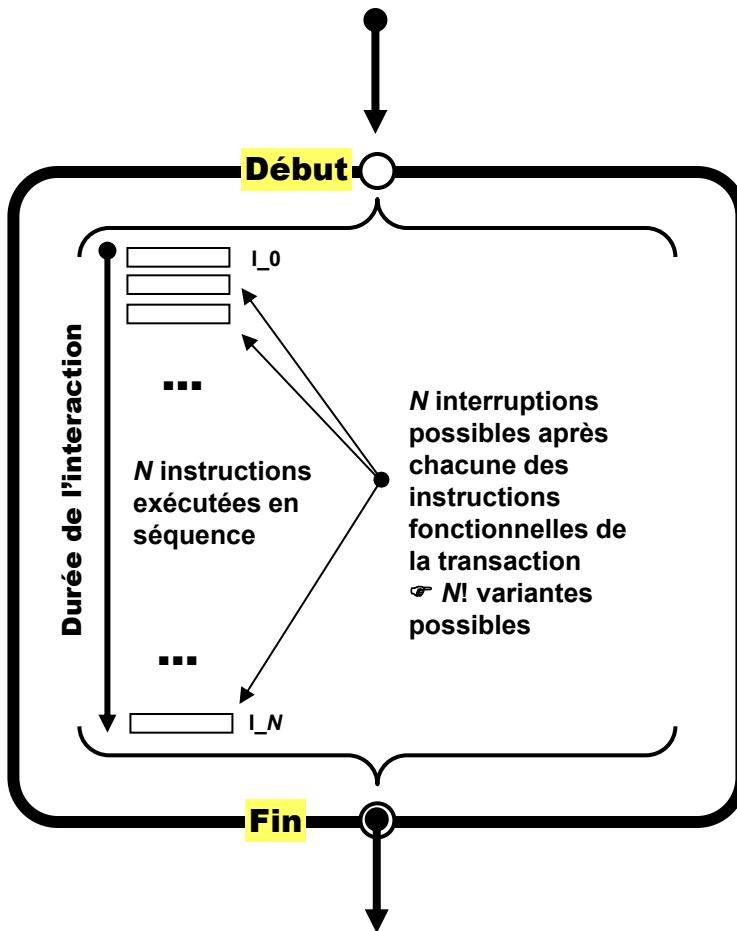
Erreurs et ignorance dans un univers complexe

- Dans un monde bien construit et organisé, ce qui fait sens collectivement côtoie à « **une instruction près** », à « **une interaction près** », ce qui n'est que du non sens
 - R.Thom disait, *Prédire n'est pas expliquer : Ce qui limite le vrai, ce n'est pas le faux, c'est l'insignifiance*
 - Avec la complexité nous vivons, de fait, dans un océan d'insignifiance
- Bien distinguer l'aspect :
 - **Individuel** → échelle **locale** d'un système
 - **Collectif** → échelle **globale** « planétaire »
- Nécessité d'une éthique constructive **partagée**

Intégration du formel ET de l'informel

- ↳ **Tous** les langages de programmation sont des **langages formels**, dont le langage des *Principia* a été le modèle
- ↳ **Tous** relèvent des ***limitations irréfutables*** établies par Gödel et Turing sur le langage des *Principia*
- ↳ Pour **optimiser** les ressources disponibles dans les systèmes, les concepteurs ont jugé indispensable d'introduire du parallélisme  de l'***indéterminisme***, donc de la complexité additionnelle
- ↳ La **validation** statique **ET** dynamique [via un « **observateur** » programmé *on line*] est indispensable pour établir la confiance avec les usagers

Effets combinatoires de la séquentialité /1



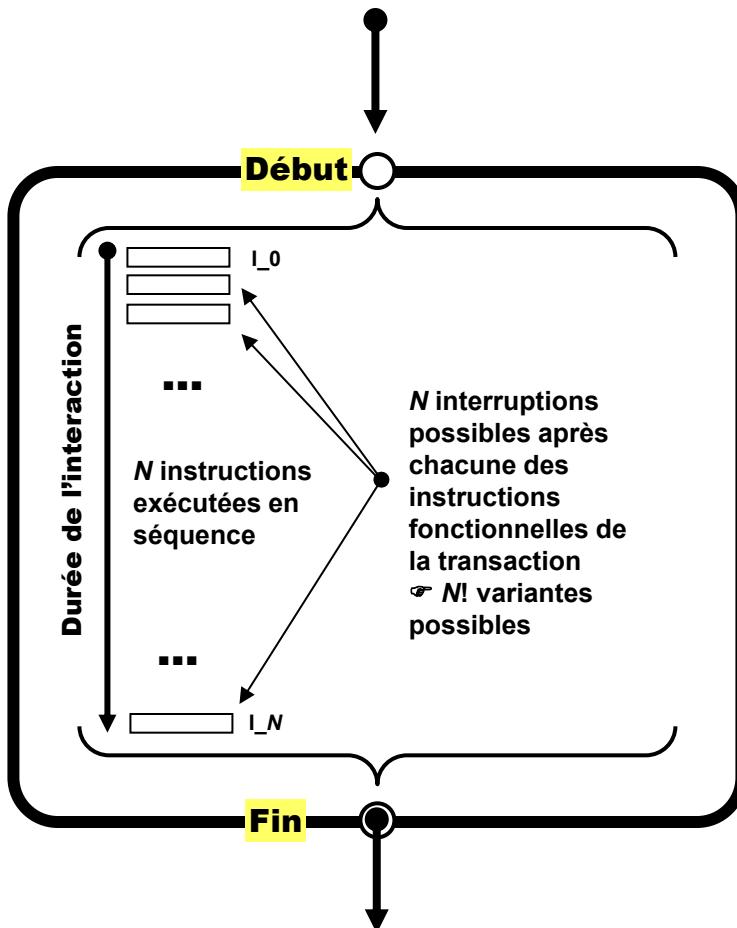
Si la séquence d'instructions fait 1 000 instructions, le nombre d'interruptions possibles est une Factorielle : 1 000!
Soit en ordre de grandeur : $5 \times 10^{2\,567}$

☞ **Nombre inaccessible**

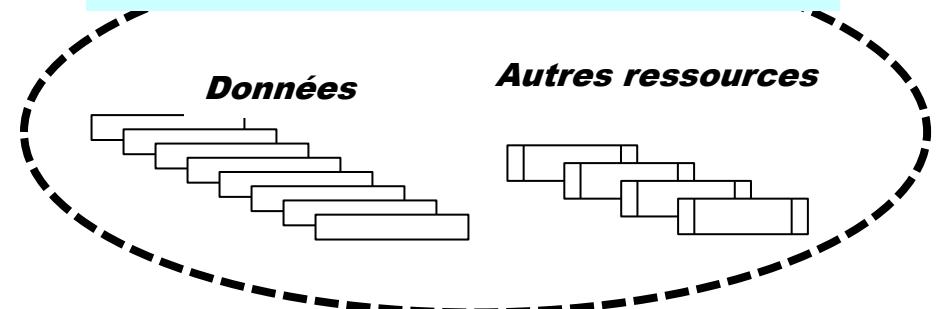
Conséquences pratiques :

- Durée de la séquence imprévisible
- Gros problème de validation
- Identification des ressources utilisées

Effets combinatoires de la séquentialité /2



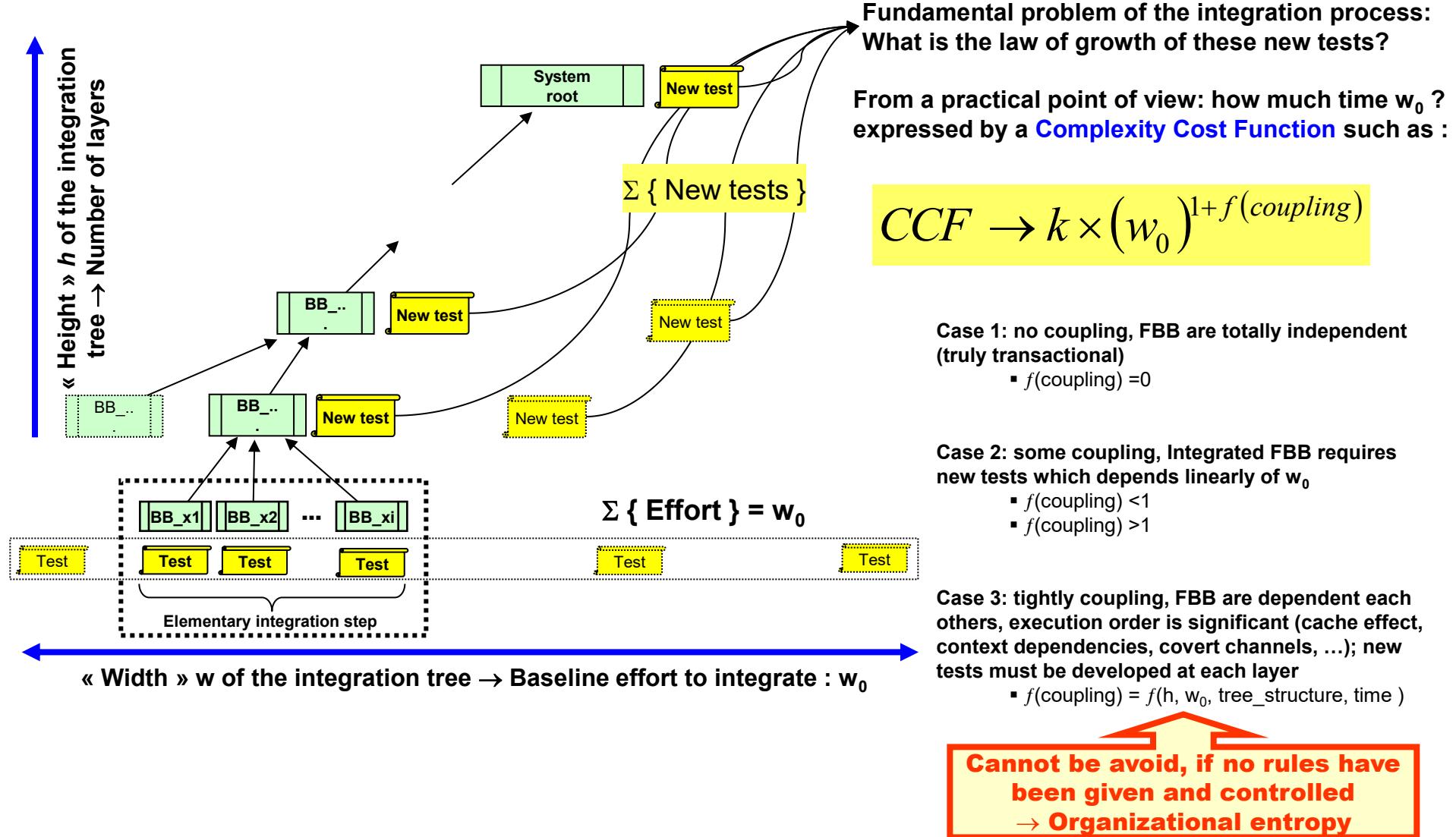
Inventaires des ressources utilisées par la séquence



Pendant toute la durée d'exécution de la séquence les ressources utilisées doivent être **strictement inaccessibles** à d'autres séquences, et ce **de façon certaine**

☞ C'est le rôle du Système d'exploitation d'offrir cette garantie, qui lui-même est un programme résultant du travail de qq. milliers de programmeurs système

Mesurer la complexité par les coûts



**Merci de votre
attention**

Quelques question ?