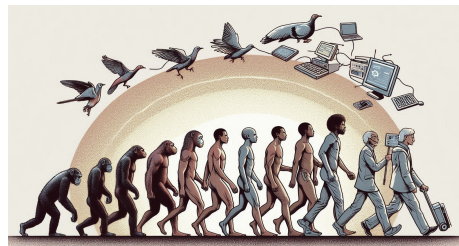


La complexité de Chaitin-Kolmogorov et la profondeur logique de Bennett.

Mesures de la richesse en information et de la richesse en structures

Jean-Paul DELAHAYE

*Professeur émérite, Université de Lille, CRISTAL UMR CNRS 9189
(Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)*



**La complexification de l'univers s'interprète
en termes d'informations et de calculs.**

On en tire une vision simple de l'évolution cosmique.

Peut-être même, la formulation d'une éthique universelle de la complexité

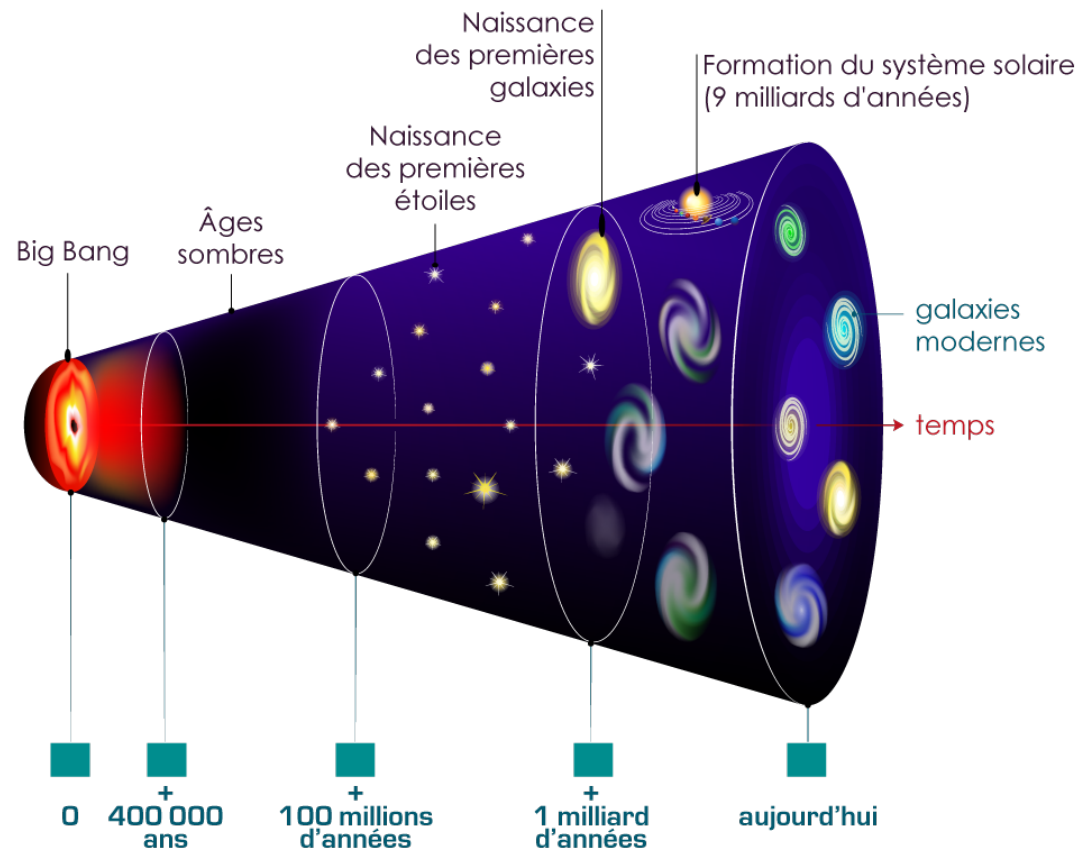
**Les nouveaux dispositifs de calcul (blockchains, réseaux neuronaux profonds)
sont des objets possédant une complexité record.**

L'univers semble s'organiser progressivement.

On parle de « **complexification** » :

« Nous savons que la vie n'a pas toujours existé. Mieux encore nous savons que l'organisation n'a pas toujours existé. La matière s'éveille d'un chaos primordial pour donner naissance par paliers successifs, à des êtres de plus en plus complexes. Les êtres vivants sont les derniers nés de cette séquence évolutive. »

Hubert Reeves : L'heure de s'enivrer, 1986.



- **La matière et l'énergie** sont des éléments essentiels pour comprendre cette évolution, mais le **calcul et la mémoire** doivent aussi être pris en compte.
- **La théorie du calcul** (Gödel, Church, Turing, etc.) est un domaine mathématique qui nous aide à comprendre et maîtriser les ordinateurs.
- Elle sert aussi à donner un sens précis au mot "**complexité**".

Elle conduit à une vision de l'évolution de l'univers **en termes non matériels**.

Vision informationnelle et computationnelle de l'univers.

==> Interprétation de l'évolution cosmique comme un progrès du calcul.

==> Considérations éthiques liées à cette vision.

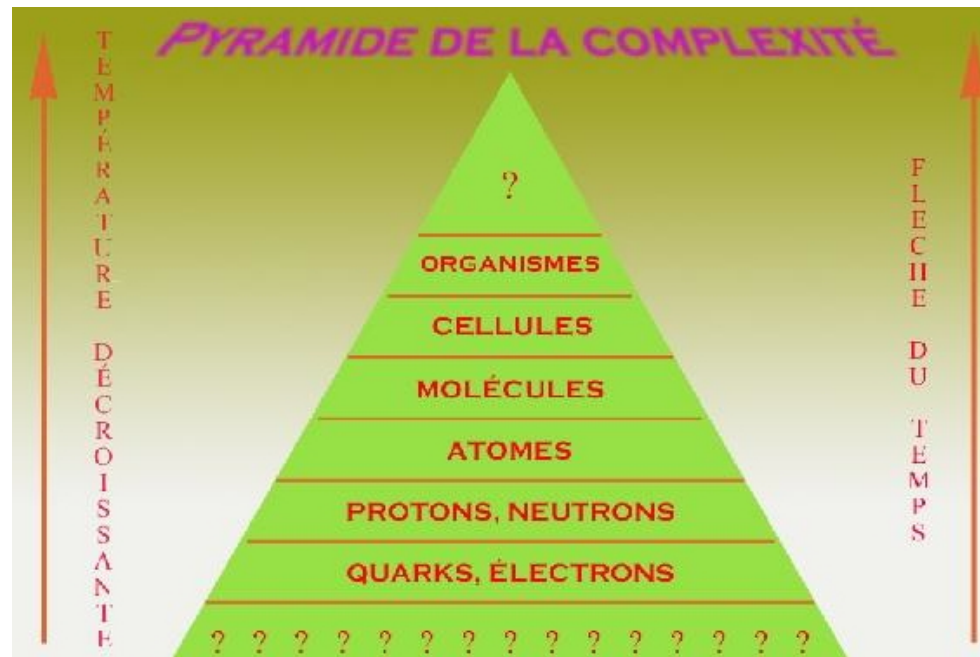
==> Regard nouveau sur les cryptomonnaies et l'IA Générative

Kurt Gödel Alan Turing,
Andrei Kolmogorov Gregory Chaitin,
Leonid Levin Charles Bennett John Mayfield,
Luciano Floridi Seith Lloyd
Hector Zenil Clément Vidal, ...

ÉVOLUTION COSMIQUE ET PROGRÈS DU CALCUL

Les astrophysiciens décrivent l'évolution de l'univers comme un refroidissement faisant apparaître des composants stables de plus en plus complexes :

les atomes ==> les molécules ==> la vie.



On peut avoir une vision informationnelle de cette évolution :

- **L'univers donne naissance à des structures qui font des calculs.**
- **Les résultats des calculs se trouvent (parfois) conservés.**

- **Les calculs de la génétique** s'effectuent avec une efficacité croissante et donnent naissance à des organismes toujours plus complexes,

C'est ce que nous nommons la **complexité organisée**.

- **Les cerveaux des vertébrés traitent les données des sens et en gardent le souvenir.**
- **Chez les humains, le langage et l'écriture accroissent l'efficacité des traitements informationnels et le stockage cumulatif des résultats progressivement acquis.**
- **Les technologies de l'information conduisent à des progrès en efficacité aussi bien pour le calcul que pour la mémorisation massive d'informations.**

Depuis 60 ans, la capacité de calcul et la capacité de stockage de l'information ont été multipliées par plus d'un million.

**L'évolution de l'univers serait un progrès du calcul
et du stockage cumulatif de l'information
en même temps qu'une montée en puissance
de la complexité organisée.**

DEUX NOTONS DE COMPLEXITÉ

A

La complexité de Kolmogorov

Andrei Kolmogorov, Gregory Chaitin, Leonid Levin ont proposé une mesure de la complexité des objets numériques (textes, images, sons, vidéos, etc.).

La taille du plus court programme engendrant l'objet Ob est cette mesure :

Complexité de Kolmogorov : $K(Ob)$.

Pour mémoriser un objet numérique, le mieux qu'on peut faire est de réserver une mémoire de $\mathbf{K}(Ob)$ bits d'information en y plaçant ce plus court programme.

$\mathbf{K}(Ob)$ = taille de la version compressée optimale de Ob .

= contenu en information de l'objet Ob .

- Les **objets aléatoires** concentrent le plus grand contenu en informations.
- La notion de **suite aléatoire** est définie à partir de la complexité de Kolmogorov (Per Martin-Löf, 1965)

Les **objets structurés** (la photo d'une ville ou d'un microprocesseur, la liste des nombres premiers jusqu'à un million) **peuvent être compressés** :

Leur contenu en information est sensiblement plus petit que leur taille.

**Il est donc faux de croire que la complexité de Kolmogorov
mesure la richesse en structures.**

Pour y arriver, il faut introduire une seconde mesure de complexité.

B

La profondeur logique de Charles Bennett

Charles Bennett, a introduit une telle **mesure de complexité organisée** :

(Charles Bennett, *Logical depth and physical complexity*. In Rolf Herken, The Universal Turing Machine. A Half-Century Survey, 1988)

La profondeur logique : $P(Ob)$

Par définition c'est le temps compté en nombre de pas de calcul quand on reconstitue un objet *Ob* à partir de sa représentation compressée optimale.

Ce temps de décompression mesure la richesse en structures car :

Plus un objet est structuré, plus il offre des moyens de le compresser, moyens qui quand on décompresse exigent de nombreux pas de calcul.

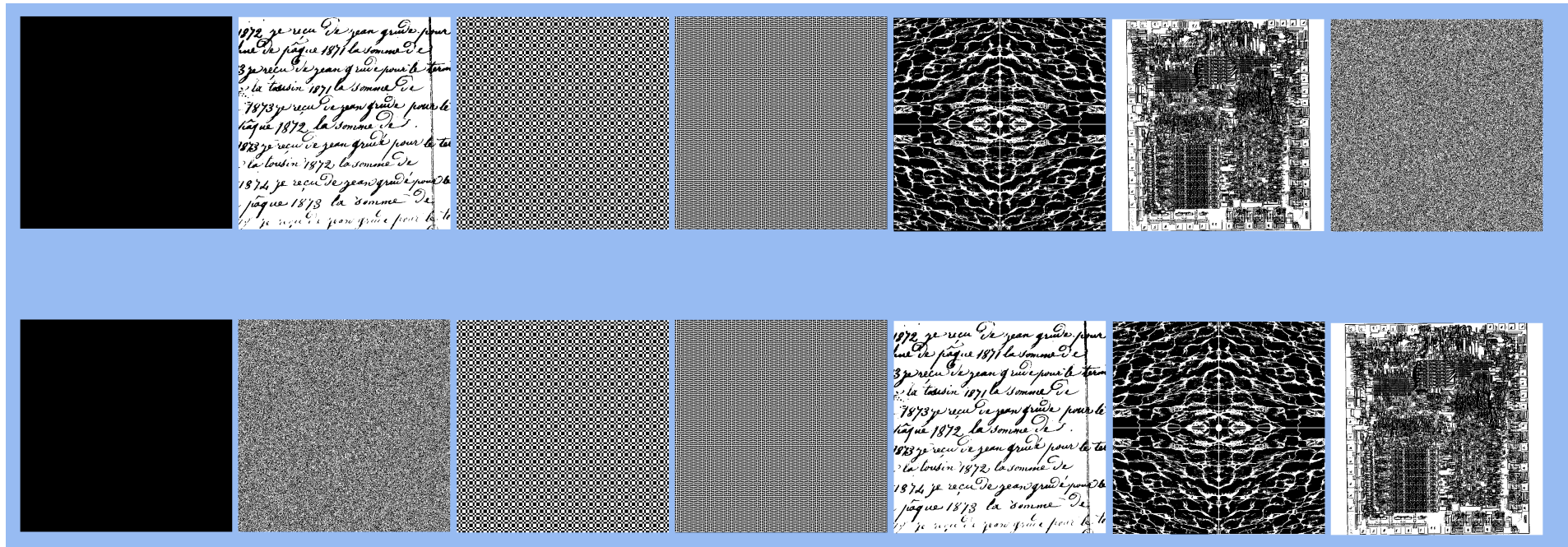
La profondeur logique de Bennett est un *contenu en calcul*, celui nécessaire pour passer de la forme compressée optimale à sa forme explicite.

Entre l'ordre répétitif et trivial et le désordre total du hasard,
se trouvent les **objets fortement structurés**,
c'est-à-dire ayant un fort contenu en calcul.

En résumé

Contenu en information = complexité de Kolmogorov

**Contenu en calcul = contenu en structures
= profondeur logique de Bennett**



H. Zenil, J.-P. Delahaye et C. Gaucherel, Image characterization and classification by physical complexity, *Complexity*, vol. 17(3), pp.26-42, 2012.

On peut risquer que :

**L'évolution cosmique accroît la profondeur logique de l'univers
et le rend de plus en plus apte à l'accroître rapidement.**

Un ordre complexe remplace le désordre du hasard.

La théorie du calcul est l'outil pour le comprendre.

Cette conception offre une interprétation
informationnelle et computationnelle
de ce qui s'est passé dans les stades primitifs de l'univers,
et plus tard avec la formation des étoiles et des galaxies,
et plus tard encore sur terre avec la Vie.

L'apparition des êtres vivants, des vertébrés supérieurs, des humains, de leurs cultures, de leurs technologies représente les étapes d'une montée
- de la richesse en organisation du monde (sa "profondeur logique"),
et de la capacité des objets du monde à produire efficacement des nouvelles structures et à les préserver.

L'univers devient un dispositif de plus en plus efficace
de calcul et de mémorisation :

**un sorte de gigantesque ordinateur
se perfectionnant sans cesse
pour produire toujours plus de complexité organisée**

CALCULS BIOLOGIQUES

L'évolution biologique vue comme un calcul :

John Mayfield, The Engine of Complexity, Evolution as Computation, 2013.

- Les calculs de l'évolution et de la sélection naturelle sont assez différents de ceux qu'un ordinateur réalise, mais on sait bien, que les ADN et les ARN portent de l'information, la combinent, la copient, la réparent, etc.
- Sur le long terme ces calculs modifient et perfectionnent les structures du vivant, ce qui provoque l'apparition d'organismes plus complexes par compétition et coévolution.
- Antoine Danchin et Cédric Gaucherel évoquent cette vision du monde vivant.

Erreur commune :

Utiliser la **complexité de Kolmogorov** pour parler de la « complexification »

Ce n'est pas **le contenu en information** qui augmente au cours du temps

— ce contenu est maximum pour les objets aléatoires ! —

mais **le contenu en structures**

c'est-à-dire **la profondeur logique de Bennett.**

ÉNERGIE, ÉMERGIE?

Parallèle entre contenu en calcul et l' « **émergie** »
(défendue par Howard Odum 1924-2002.)

L'émergie pour un système vivant, social, ou technologique est
la quantité d'énergie nécessaire
pour le créer en considérant son origine la plus probable.

La **profondeur logique de Bennett** est une mesure de la quantité de calculs qu'il
a fallu mener pour obtenir un objet à partir de son origine la plus probable.

Les deux concepts pourraient se retrouver et des conversions des évaluations de l'un à l'autre seraient envisageables...

... si le coût énergétique du calcul était constant.

Mais, ce n'est pas du tout ce que nous observons !

- Le coût énergétique du calcul, même en se limitant aux calculs faits par nos ordinateurs, a diminué depuis soixante ans d'un facteur un million.
- Selon l'endroit de l'univers l'énergie dépensée pour un calcul change.
- Par ailleurs, une grande quantité d'énergie peut être dépensée sans que rien n'en reste, si aucun dispositif de mémorisation n'est là pour en conserver les résultats.

La profondeur logique de Bennett est une sorte de mesure
du travail de calcul nécessaire pour obtenir une structure.

Cette mesure ne prend en compte que les calculs
dont les résultats persistent

**Le contenu en calcul n'est pas évaluable simplement en terme
énergétique : c'est autre chose !**

CE À QUOI NOUS TENONS ?

Muni de ce concept de **contenu en calcul** réfléchissons aux choses auxquelles nous attribuons de la valeur.

- **La vie humaine** est (en général !) une chose que nous souhaitons protéger.

Chaque vie humaine est une richesse en expériences accumulées, en culture en intelligence et aussi en capacités à produire ses propres objets complexes.

- **L'art et la littérature** créent des objets qui, soit directement, soit par la position qu'ils occupent dans les sociétés humaines enrichissent sa complexité structurelle.
- **La musique** est un jeu de constructions sonores variées et complexes.

- **Les sciences enrichissent**

- les rapports qui existent entre le monde et l'image que nous en avons,
- ainsi que nos moyens d'action.

Elles construisent de nouvelles structures dans l'univers.

Ces structures se perfectionnent par **la recherche**, c'est-à-dire par

- l'organisation **d'expérimentations**

— *assimilables à des calculs* —

- les progrès des théories qui permettent de formuler des hypothèses et les sélectionner

— *encore des calculs* —

- Préserver les espèces menacées de disparition semble une nécessité morale,

Il est plus grave de **faire disparaître une espèce** que
de tuer un animal d'une espèce prospère.

- Ce jugement correspond à ce que suggérerait :

un principe de maximisation
de la profondeur logique de Bennett.

NOÉ !

- Dans la Bible, quand Noé emplit son arche, il tente de conserver la diversité du monde animal et ne prenant qu'un petit nombre de couples de chaque espèce.
- L'affirmation que nous avons le devoir de maintenir la complexité du monde aussi grande que possible n'est pas nouvelle : en écrivant la Bible il y a trois millénaires, ses rédacteurs l'avait déjà admise !

- Le principe que nous devons

préserver notre environnement

est de même nature.

- La richesse des interactions des espèces animales et végétales d'un écosystème est une organisation complexe qui s'est mise en place lentement.
- Nous avons le devoir de la préserver.

Une fois détruite nous ne saurions pas la reconstituer.

- Détruire un livre dont il n'existe qu'un seul exemplaire,
- Brûler des tableaux dont on n'a aucune copie,
- Saccager des monuments, des sculptures, des objets anciens témoins de civilisations disparues,

tout cela nous semble **éthiquement incorrect**.

Tout ce qui contribue à faire baisser la complexité organisée est dans l'esprit de la majorité des humains une mauvaise chose.

CRÉER PROTÉGER COLLECTIONNER

- À l'inverse **créer, conserver, collectionner** est considéré comme "bien".
- Nous dépensons de l'argent pour que les œuvres d'art anciennes soient collectées, restaurées, soigneusement répertoriées, photographiées et rangées.
- Nos musées sont une preuve que nous aimons la complexité organisée et que nous nous faisons un devoir de la conserver dans toute sa diversité.

Il semble que, sans le formuler explicitement, nous cherchons à augmenter la complexité organisée du monde.

- Un principe moral sur lequel un grand nombre d'humains s'entendent exige qu'on protège, et qu'on se donne les moyens d'augmenter cette richesse en structures.

Cela concerne :

- les êtres vivants,
- les humains,
- les œuvres d'arts,
- les théories scientifiques,
- les organisations sociales
- et tout ce qui maintient, facilite la multiplication de ces choses.

UNE ÉTHIQUE DE LA COMPLEXITÉ ORGANISÉE

- Le « **bien** », ce serait : **conserver, créer et contribuer à faire croître la complexité organisée.**
- Charles Bennett en a esquissé l'idée.
- Clément Vidal et moi-même, nous cherchons à préciser cette éthique.
- Jean-Paul Delahaye, Clément Vidal, *Organized Complexity: Is Big History a Big Computation?*, The American Philosophical Association, Newsletter Philosophy and computer, 17-2, pp 49-54, 2018 :
- Jean-Paul Delahaye, Clément Vidal, *Universal Ethics: Organized Complexity as an Intrinsic Value*, In *Evolution, Development and Complexity: Multiscale Evolutionary Models of Complex Adaptive Systems*, edited by Georgi Yordanov Georgiev, Springer, 2018.

Quelques points en faveur d'une éthique de la complexité organisée

A

- Elle est déjà **présente dans une majorité de systèmes moraux et éthiques** qui se retrouvent et convergent sur les impératifs qu'elle formule.
- Elle serait donc un moyen de définir un **terrain d'entente** réunissant un grand nombre d'êtres humains, sans contredire ce que déjà, ils adoptent comme valeurs.

B

- Elle promeut des principes qu'on peut qualifier **d'universels**

Cela dans **deux sens complémentaires**.

(a) Elle s'oppose aux nationalismes, aux "spécismes" (la croyance que certaines espèces méritent de la considération à l'exclusion de toutes les autres) et aux morales étroites n'accordant de la valeur qu'à des êtres ou objets très particuliers.

Elle promeut une idée généreuse et large de ce qui doit être préservé et encouragé.

(b) Elle peut être adoptée par tous les **êtres doués d'autonomie** :

**Humains, animaux, extraterrestres (s'il y en a !), et surtout
robots et intelligences artificielles.**

À une époque où nous commençons à envisager que nous aurons à vivre avec
des êtres intelligents d'une nature différente de la nôtre,
il est intéressant de savoir qu'une éthique de formulation simple
qui n'est pas centrée uniquement sur l'être humain est possible.

COMPLEXITÉ DU MONDE NUMÉRIQUE

Il est remarquable mais peut-être pas étonnant que soient apparus récemment deux exemples d'objets numériques complexes (au sens de Bennett) créés par les êtres humains et concentrant des quantités de calculs colossales.

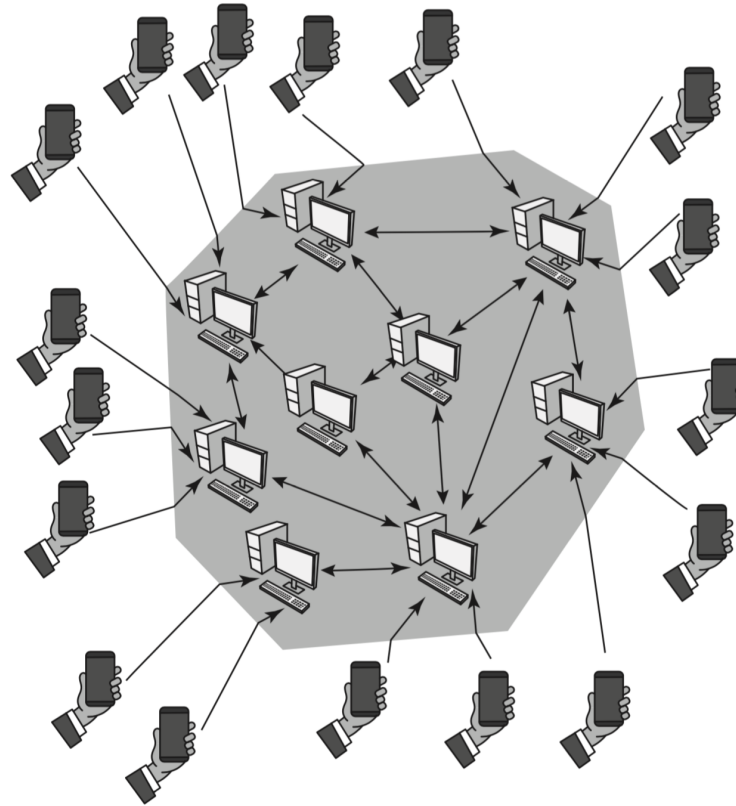
LA BLOCKCHAIN DU BITCOIN



Principe de fonctionnement des blockchains.

- Un fichier (la **blockchain**) est reproduit en un grand nombre de point d'un réseau (18000 ordinateurs pour le Bitcoin aujourd'hui)
- La **blockchain** contient les informations indiquant par exemple combien chaque compte détient de Bitcoins.
- Ajout progressif et simultané de nouvelles pages (ou block) à la **blockchain**.
- Rien n'est jamais effacé.

C'est le premier élément de sécurisation : la redondance.



Sécurisation aussi par le mécanisme de la « preuve de travail » (« proof of work »)

Logique de fonctionnement du réseau décentralisé

- **Incitation à ce qu'il y ait des nœuds validateurs.**

Donc une récompense toutes les 10 minutes (50 Bitcoins, puis 25, puis, 12,5, etc.)

- **Mécanisme de désignation d'un validateur qui gagne l'incitation et,**
et qui est chargé de créer la nouvelle page.

- **Tout le monde veut être le validateur des prochaines 10 minutes**
donc concours de calcul : inversion partielle de la fonction de hachage Sha256.

- Le résultat de cette inversion exige un grand nombre de calculs.
- La difficulté est réajustée périodiquement.
- Le résultat du concours est mis dans la page ajoutée.
- **Il en résulte un coût considérable pour la fabrication d'une "fausse blockchain"**
 - qui attribuerait des faux Bitcoins à un compte.
 - ou qui permettrait de faire des doubles dépenses, etc.
- Il faudrait recalculer les inversions partielles du Sha256, faites pour les pages qu'on veut "falsifier".
- **Il faudrait donc un calcul équivalent en nombre d'étapes élémentaires au calcul qui a été fait par tout le réseau des validateurs en compétition.**

Le contenu en calcul de la blockchain est ici un outil de sécurisation.

C'est bien une forme de « profondeur logique » qui est au cœur du processus de sécurisation par la méthode de la « **preuve de travail** ».

La compétition entre validateurs a, petit à petit depuis 2009, conduit à des investissements en calcul de plus en plus importants.

Fermes de minage





Quelques chiffres

- **Aujourd'hui le réseau bitcoin consomme environ 200 TWh/an.**
Ce chiffre est une mesure de la profondeur logique de la blockchain.
- **Le taux de hachage** était le 6 décembre 2025
 8×10^{20} Hash/s
(8×10^{20} calculs de la fonction de hachage Sha256 par seconde)
- Toutes les 10 minutes s'ajoutent donc la « quantité de calcul » de
 $600 \times 8 \times 10^{20} = 5 \times 10^{23}$ calculs de Hash dans la blockchain.

À chaque nouvelle page s'ajoute donc ce contenu en calculs
dans la **blockchain de Bitcoin** qui est sans doute :

**L'objet artificiel ayant le plus grand contenu en calcul
jamais créé.**

Au bout d'un an c'est environ **200 TWh** de calcul ajoutés à la blockchain
Ce contenu dépasse donc **500 TWh** de calcul en tout
qui est la production annuelle électrique en France (536 TWh pour 2024)

Comparaison avec d'autres calculs importants

- Calcul des décimales de π : 300 000 milliards (2-4-2025),
- Grands nombres premiers,
 $2^{136\,279\,841} - 1$ qui a 41 024 320 chiffres (GIMPS 12-10-2024).

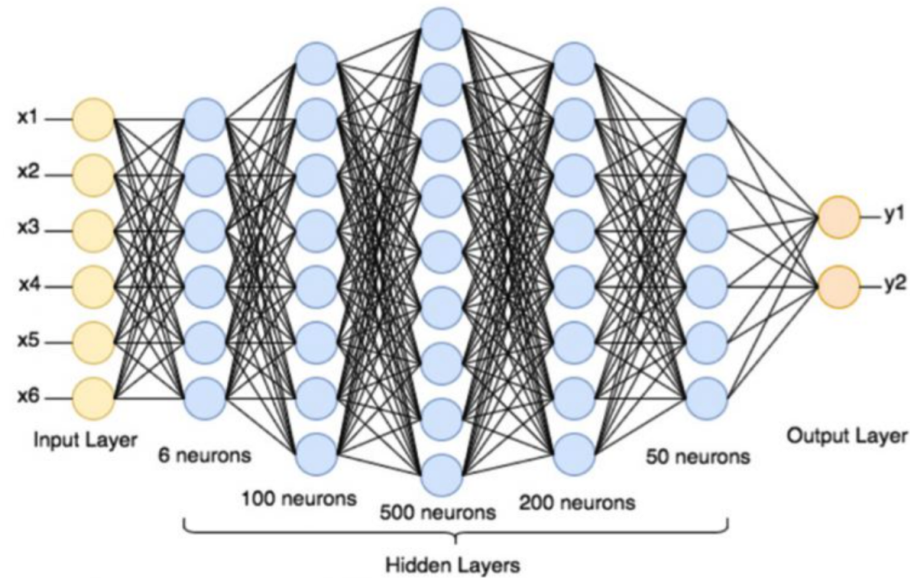
Factorisation de grands entiers. etc.

Cependant, jamais la consommation électrique cumulée pour obtenir ces résultats n'a représenté l'équivalent un pourcentage important des 500 TWh que l'on peut attribuer à la **blockchain du Bitcoin**.

Reste le cas de l'IA Générative avec ses LLM ?

LA COMPLEXITÉ DES LLM

"deep learning", apprentissage profond



Le réseau de neurones artificiels d'un LLM comme celui de ChatGPT-5 ou Gemini-3 provient de la prise en compte, token par token, de corpus géants de textes (millier de milliards de mots)

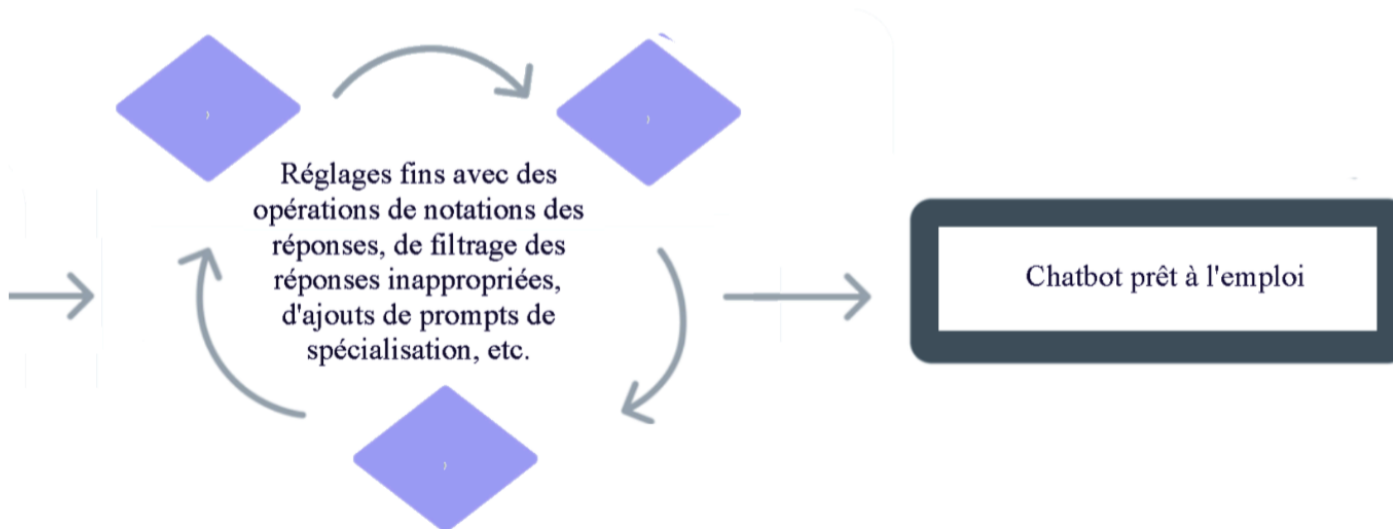
- **600 milliards** de mots (tokens) ont été utilisés pour entraîner **GPT-3**
- **2 000 milliards** pour **Llama 2**, de Meta (Facebook).
- Pour ChatGPT-5 et Gemini-3 **sans doute plus**

Les réseaux de neurones profonds des LLM sont des objets artificiels ayant un grand contenu en calcul.

Corpus énorme de
textes (milliers de
milliards de mots)

Apprentissage auto-
supervisé
(calculs massifs)

Fonction probabiliste
de complétion de
contexte



Plus de contenu en calculs que la blockchain du Bitcoin ?

La comparaison des contenus est difficile :

- compter nombre d'opérations utilisées surestime le résultat.
- il n'existe pas d'unité de mesure permettant de comparer des Hash (pour le Bitcoin), et des opérations élémentaires de mise à jour d'un réseau de neurones.

**On est donc amené à ne comparer que
les quantités d'électricité utilisées pour les créer.**

- Aujourd'hui on évalue à **200 TWh** la consommation électrique de l'IA.
- Cela regroupe tout (y compris le coût électrique du fonctionnement).

Le "Rapport 2025 *Energy and IA*" de *International Energy Agency* annonce **950 TWh** pour 2030.

Pour un seul LLM, c'est sans doute moins que pour la blockchain du Bitcoin

Nous avons des raisons de croire que les objets détenant les plus grands contenus en calcul sont la blockchain du Bitcoin et les LLM

Ce sont les seuls qui exigent une importante puissance électrique durant des durées se comptant en mois.

Il est assez probable que les LLM finiront pas dépasser la blockchain du Bitcoin

Ces objets sont-ils utiles ?
Est-ce que nous leur attribuons de la valeur ?

Pour le Bitcoin, ceux qui en détiennent y accordent certainement de la valeur !
(La capitalisation des bitcoins en circulation est 1800 milliards de dollars le 10-12-2025)

Pour les LLM, oui aussi, bien évidemment !

Conclusion

Les réflexions dans lesquelles on se trouve engagé en envisageant une **éthique de la complexité organisée** doivent être approfondies.

Elles pourraient conduire à une **morale élégante** et aux visées autorisant mieux des dépassements de soi que les morales strictement humanistes ou centrées sur des valeurs étroites.

**On serait mieux à même d'affronter l'existence
de véritables intelligences artificielles,
de nous entendre avec elles... et de les programmer,
et de résoudre peut-être le problème de l'alignement des IA.**

**Concernant les objets possédant un grand contenu en calcul,
il est certain qu'il y en aura de plus en plus et qu'ils joueront un
rôle de plus en plus important.**

**Est-ce l'indice d'un passage dans la nature de l'évolution
qui la ferait basculer du *monde biologique* au
monde technologique ?**



L'Arche de Noé sur le mont Ararat, de Simon de Myle (1570).

Bibliographie

- Charles Bennett, Logical Depth and Physical Complexity, In *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*, edited by R. Herken, 227–57, Oxford University Press, 1988.
<https://pdfs.semanticscholar.org/ac97/5f088cf61c09bae8506808468a08467d55e6.pdf>.
- Bennett, C. H. 2014. *Evidence, Computation, and Ethics*. Simons Symposium on Evidence in the Natural Sciences, 2014 :
https://simonsfoundation.s3.amazonaws.com/share/mps/conferences/Symposium_on_Evidence_in_the_Natural_Sciences/Bennett_slides.pdf
- Jean-Paul Delahaye, Clément Vidal, Organized Complexity: Is Big History a Big Computation?, *The American Philosophical Association, Newsletter Philosophy and computer*, 17-2, pp 49-54, 2018 :
<http://c.ymcdn.com/sites/www.apaonline.org/resource/collection/EADE8D52-8D02-4136-9A2A-729368501E43/ComputersV17n2.pdf>
- Jean-Paul Delahaye, Clément Vidal, Universal Ethics: Organized Complexity as an Intrinsic Value, In *Evolution, Development and Complexity: Multiscale Evolutionary Models of Complex Adaptive Systems*, edited by Georgi Yordanov Georgiev, Claudio Flores Martinez, Michael E. Price, and John M. Smart, Springer, 2018.

doi:10.5281/zenodo.1172976. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1172976>.

- Cédric Gaucherel, Ecosystem Complexity Through the Lens of Logical Depth: Capturing Ecosystem Individuality, *Biological Theory* 9, no. 4 : 440–51, 2014.

doi:10.1007/s13752-014-0162-2, 2014.

- John Mayfield, *The Engine of Complexity: Evolution as Computation*, New York: Columbia University Press, 2013.
- Howard Odum, *Environment, Power, and Society for the Twenty-First Century: The Hierarchy of Energy*, New York: Columbia University Press, 2007.
- Hector Zenil, Jean-Paul Delahaye, Cédric Gaucherel, Image characterization and classification by physical complexity." *Complexity* 17.3 : 26-42, 2012.