Calculer avec des sous-espaces

Laurent Lafforgue

(Centre Lagrange, Huawei Technologies France)

21 mai 2026

EDF Lab Paris-Saclay

Séminaire: “Quelles mathématiques
pour une IA fiable, frugale, moins artificielle ?”

(organisé par l’Association Aristote)

Le point de vue relationnel en mathématiques

Principe : Tout objet mathématique doit être considéré
dans l'environnement des objets de son type.

Phénomène-clef (qui est un théorème de base) :

Considéré dans l'environnement des objets de son type,
tout objet mathématique est caractérisé par
le réseau de ses relations avec les objets de ce type.

Formalisation : la notion de "catégorie"

Une catégorie (ou "ville mathématique") consiste en

- un graphe orienté constitué de
  - sommets (ou "villes mathématiques"),
  - flèches (ou "itinéraires mathématiques")

    $$\bullet \longrightarrow \bullet$$

    allant d'un sommet "source" à un sommet "but",
- une loi associative de composition des itinéraires

$$\left(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \right) \longmapsto \left(X \xrightarrow{g \circ f} Z \right).$$

Quelques idées générales sur les topos

- La notion de topos a été introduite par Grothendieck vers 1960,
  d'abord par une définition constructive :

  Un topos est une catégorie qui peut être construite
  comme la catégorie des "faisceaux" sur
  une "petite catégorie" munie d'une "topologie".

- Ultérieurement, Giraud a donné une définition axiomatique équivalente :

  Un topos est une catégorie
  qui satisfait la même liste explicite de "bonnes propriétés constructives"
  que la catégorie des ensembles.

- Grothendieck a défini une notion d'itinéraire entre topos

$$\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

  et une loi associative de composition des itinéraires

$$\left(\mathcal{E}'' \xrightarrow{f} \mathcal{E}' \xrightarrow{g} \mathcal{E}\right) \longmapsto \left(\mathcal{E}'' \xrightarrow{g \circ f} \mathcal{E}\right).$$

- Les topos forment une catégorie.
- Les itinéraires $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ d'un topos $\mathcal{E}'$ vers un topos $\mathcal{E}$ forment une catégorie $\mathcal{G}eom(\mathcal{E}', \mathcal{E})$.

Généralisation des notions d'espace et de point

- Tout espace topologique X peut-être vu comme un topos $\mathcal{E}_X$,
  mais il y a beaucoup plus de topos que d'espaces topologiques.
- Pour tous espaces topologiques X, Y, il y a correspondance

$$\left\{ \frac{\text{applications continues}}{X \longrightarrow Y} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \frac{\text{itinéraires topossiques}}{\mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{E}_Y} \right\}.$$

- En particulier, l'espace réduit à un point

$$\{\bullet\}$$

  peut être vu comme un topos $\mathcal{E}_{\{\bullet\}}$,
  et on peut appeler "points" d'un topos $\mathcal{E}$ les itinéraires topossiques

$$\mathcal{E}_{\{\bullet\}} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

- Plus généralement, comme les applications continues

$$S \to X \qquad \text{d'un espace } S \text{ dans un espace } X$$

  peuvent être appelées "points mobiles" de X paramétrés par S,
  les itinéraires topossiques

$$\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

  peuvent être appelés les "points mobiles" du topos $\mathcal{E}$ paramétrés par un topos $\mathcal{E}'$.

De la syntaxe des systèmes logiques ou théories à leur sémantique

- Un système logique, ou théorie ("géométrique du premier ordre") $\mathbb{T}$ consiste en

  - un vocabulaire (constitué de "noms d'objets", "noms de fonctions", "noms de relations"),
  - une liste de règles de grammaire, appelées "axiomes", qui ont la forme d'implications

    $$\varphi \vdash \psi$$

    entre "formules géométriques" écrites dans ce "vocabulaire".

- Toute telle théorie $\mathbb{T}$, vue comme une "syntaxe" a une "sémantique" qui consiste en

  - la catégorie $\mathbb{T}\text{-mod}\,(\text{Ens})$ de ses modèles ensemblistes,
  - plus généralement, les catégories $\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E})$

    de ses modèles dans les environnements de topos $\mathcal{E}$,
  - les transformations de "changements d'environnement"

    $$\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}) \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}')$$

    définies par les itinéraires topossiques

    $$f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

L'incarnation topossique de la sémantique des théories

Vers 1975, Makkai et Reyes,
se fondant sur Grothendieck, Hakim, Lawvere, Joyal, $\cdots$ ont démontré :

Théorème. – *Pour toute théorie (géométrique du premier ordre)* $\mathbb{T}$, *il existe un topos* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *(unique à équivalence près) tel que*

- *la catégorie des modèles ensemblistes* $\mathbb{T}$-mod (Ens) *s'identifie à la catégorie des points*

$$\mathrm{pt}(\mathcal{E}_{\mathbb{T}}) = \mathcal{G}eom(\mathcal{E}_{\{\bullet\}}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) = \{\mathcal{E}_{\{\bullet\}} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\},$$

- *plus généralement, pour tout topos* $\mathcal{E}$, *la catégorie*

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \quad \textit{des modèles de } \mathbb{T} \textit{ dans l'environnement } \mathcal{E}$$

  s'identifie à la catégorie des points mobiles de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *paramétrés par* $\mathcal{E}$

$$\mathcal{G}eom(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) = \{\mathcal{E} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\},$$

- *pour tout itinéraire topossique* $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$, *la transformation de changement d'environnement*

$$f^{-1} : \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}')$$

  correspond à la loi de composition avec f

$$\left(\mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\right) \longmapsto \left(\mathcal{E}' \xrightarrow{g \circ f} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\right).$$

Une notion de sous-topos qui a les propriétés des sous-espaces

Grothendieck a défini une notion de sous-topos d'un topos $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$$

telle que :

- Pour tout topos $\mathcal{E}$, ses sous-topos forment un ensemble partiellement ordonné par la relation $\supseteq$ de factorisation

$$(\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}) \supseteq (\mathcal{E}'' \hookrightarrow \mathcal{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}'' \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, hook] \\ & \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

- Toute famille de sous-topos $\quad \mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}\,, \quad i \in I\,,$

  a une réunion $\bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i$ caractérisée par $\quad \mathcal{E}' \supseteq \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i \Longleftrightarrow \mathcal{E}' \supseteq \mathcal{E}_i\,, \quad \forall\, i \in I\,,$

  et une intersection $\bigwedge\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i$ caractérisée par $\quad \bigwedge\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i \supseteq \mathcal{E}' \Longleftrightarrow \mathcal{E}_i \supseteq \mathcal{E}'\,, \quad \forall\, i \in I\,.$

- Toute paire de sous-topos $\quad \mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E} \quad$ et $\quad \mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}$

  définit un sous-topos "différence" $\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2$ caractérisé par $\quad \mathcal{E}' \supseteq \mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{E}' \vee \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}_1\,.$

- Tout itinéraire topossique $\quad \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E} \quad$ se factorise à travers un plus petit sous-topos $\quad \mathcal{E}' \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow \mathcal{E}$
  appelé l'image $\quad \mathrm{Im}(f) \quad$ de f.

Opérations externes sur les sous-topos

Proposition. – *Tout itinéraire topossique*

définit
$$f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

(i) *un opérateur d'image directe des sous-topos*

$$\exists_f = f_* : \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}'\} \longrightarrow \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}\}$$

$$(\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}') \longmapsto f_*\mathcal{E}'_1 = \mathrm{Im}(\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}),$$

(ii) *un opérateur d'image réciproque des sous-topos*

$$f^{-1} : \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}\} \longrightarrow \{\textit{sous-topos de } \mathcal{E}'\}$$

$$(\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}) \longmapsto (f^{-1}\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}')$$

caractérisé par $f^{-1}\mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}'_1 \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \supseteq f_*\mathcal{E}'_1$.

Remarques :

(i) f_* respecte les réunions arbitraires, et f^{-1} les intersections arbitraires.

(ii) (O.C., L.L.) f^{-1} respecte aussi les réunions finies.

(iii) (O.C., L.L.) Si f est "simplement connexe",

f^{-1} respecte les réunions arbitraires, et il existe un opérateur

$$\forall_f = f_! : \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}'\} \longrightarrow \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}\}$$

$$(\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}') \longmapsto (f_!\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E})$$

caractérisé par $\quad f_!\mathcal{E}'_1 \supseteq \mathcal{E}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{E}'_1 \supseteq f^{-1}\mathcal{E}_1.$

La notion de topologie de Grothendieck

Rappel.– Un "topos" est une catégorie $\mathcal{E}$ qui peut être présentée (à équivalence près) comme "catégorie des faisceaux"

$$\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$$

sur une "petite catégorie" $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J.

Définition. – *Une topologie J sur une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en une notion de recouvrement des sommets X de $\mathcal{C}$ par des familles de flèches de but X*

$$\left(X_i \xrightarrow{x_i} X\right)_{i\in I}$$

qui satisfait les trois propriétés suivantes :

(Composition) Pour tout recouvrement $\left(X_i \xrightarrow{x_i} X\right)_{i\in I}$

et tous recouvrements $\left(X_{i,j} \xrightarrow{x_{i,j}} X_i\right)_{j\in I_i}$,

les composés $\left(X_{i,j} \xrightarrow{x_{i,j}} X_i \longrightarrow X\right)_{i\in I, j\in I_i}$ *forment un recouvrement.*

(Induction) Toute flèche $X \longrightarrow Y$ transforme les recouvrements de Y en des recouvrements de X.

(Factorisation) Si tout élément $X_i \xrightarrow{x_i} X$ d'un recouvrement $\left(X_i \xrightarrow{x_i} X\right)_{i\in I}$ *se factorise à travers une flèche $X_{i'} \xrightarrow{x_{i'}} X$, alors les $X_{i'} \xrightarrow{x_{i'}} X$ forment un recouvrement de X.*

Sous-topos et topologies

Proposition (Grothendieck, SGA 4). –
Pour tout topos $\mathcal{E}$ présenté comme catégorie des faisceaux

$$\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$$

sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J, on a :

(i) *Toute topologie J' de $\mathcal{C}$ qui raffine J*
(au sens que tout recouvrement pour J est un recouvrement pour J')
définit un sous-topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \cong \mathcal{E}.$$

(ii) *Réciproquement, tout sous-topos*

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$$

est de la forme $\mathcal{E}' \cong \widehat{\mathcal{C}}_{J'}$ pour une unique topologie J' qui raffine J.

Conséquence :
Les opérations sur les sous-topos (union, intersection, différence,
image directe f_* par un itinéraire topossique $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$, image réciproque, $\cdots$)
correspondent à des opérations sur les topologies.

Observation :
Une topologie est donnée par une famille de recouvrements qui l'engendrent.

Sous-espaces et sous-topos

Rappel. – *Si X est un espace topologique, son topos $\mathcal{E}_X$ est le topos des faisceaux*

$$\mathcal{E}_X = \widehat{(\mathcal{C}_X)}_{J_X}$$

sur $\mathcal{C}_X$ = catégorie des ouverts de X,
pour J_X = notion usuelle de recouvrement

$$(U_i \subseteq U)_{i \in I} \quad \text{caractérisé par} \quad \bigcup_{i \in I} U_i = U.$$

Observation. – *Tout sous-espace $Y \hookrightarrow X$ définit un sous-topos*

$$\mathcal{E}_Y = \widehat{(\mathcal{C}_X)}_{J_Y} \hookrightarrow \widehat{(\mathcal{C}_X)}_{J_X}$$

défini par la topologie J_Y sur $\mathcal{C}_X$ pour laquelle
une famille $(U_i \subseteq U)_{i \in I}$ est un recouvrement
si et seulement si $\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = U \cap Y$.

Observation : Il y a beaucoup plus de topologies sur $\mathcal{C}_X$, et donc de sous-topos de $\mathcal{E}_X$, que de sous-espaces $Y \hookrightarrow X$.

Exemple : Si X est muni d'une mesure μ,
$\mathcal{C}_X$ peut être munie de la topologie J_μ pour laquelle
une famille $(U_i \subset U)_{i \in I}$ est un recouvrement si elle a une sous-famille dénombrable

$$(U_{i_n} \subset U)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } \mu\left(U - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{i_n}\right) = 0.$$

Le théorème de dualité de Caramello

Théorème. –
Considérons une théorie (géométrique du premier ordre) $\mathbb{T}$ *écrite dans un langage formel* Σ*, avec son topos associé*

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$

Alors :

(i) *Alors toute théorie* $\mathbb{T}'$ *qui est un "quotient" de* $\mathbb{T}$
c'est-à-dire est écrite dans le même langage Σ
et est déduite de $\mathbb{T}$ *en ajoutant des axiomes supplémentaires,*
définit un sous-topos

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$

(ii) *Deux théories quotients* $\mathbb{T}_1$ *et* $\mathbb{T}_2$ *de* $\mathbb{T}$
définissent le même sous-topos de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
si et seulement si les axiomes de l'une
sont démontrables à partir des axiomes de l'autre.

(iii) *Tout sous-topos*

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

est de la forme $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$ *pour des théories quotients* $\mathbb{T}'$ *de* $\mathbb{T}$*.*

Conséquence :
Tous les problèmes de démontrabilité en logique géométrique du premier ordre sont constructivement équivalents à des problèmes d'engendrement de topologies.

Application à l'apprentissage syntactique

Proposition. –

Considérons un modèle M dans un topos $\mathcal{E}$
d'une théorie (géométrique du premier ordre) $\mathbb{T}$.
Considérons l'itinéraire topossique qui correspond à M

$$m : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

puis son image

$$\mathrm{Im}(m) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

nécessairement définie par une théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$, avec

$$\mathrm{Im}(m) = \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$

Alors une implication entre formule géométriques

$$\varphi \vdash \psi$$

est démontrable dans $\mathbb{T}'$
si et seulement si elle est vérifiée par le modèle M.

Remarque :

Ainsi, $\mathbb{T}'$ est la "description" syntactique

du modèle M dans le vocabulaire Σ de $\mathbb{T}$.

Arithmétique des théories

- Pour tout topos $\mathcal{E}$
  qui incarne la sémantique d'une théorie $\mathbb{T}$ au sens que
  $$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}},$$
  les opérations internes sur les sous-topos de $\mathcal{E}$
  (réunion, intersection, différence)
  correspondent à des opérations sur les théories quotients de $\mathbb{T}$,
  c'est-à-dire sur les systèmes d'axiomes écrits dans le langage de $\mathbb{T}$.
- Pour tout itinéraire topossique
  $$f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$
  qui relie deux topos incarnant les sémantiques de deux théories $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$,
  au sens que $\quad \mathcal{E}' \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}\,, \quad \mathcal{E} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}},$
  les opérations externes induites par f

  f_*, f^{-1} et éventuellement $f_!$

  correspondent à des opérations sur les théories quotients de $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$.

Réduction à des catégories “localement calculables”

Proposition (O.C., L.L.). –
Tout topos $\mathcal{E}$ peut être présenté, de multiples façons,
comme topos des faisceaux pour une topologie J

$$\mathcal{E} \cong \widehat{\mathcal{C}}_J$$

sur des catégories $\mathcal{C}$ associées à un vocabulaire

$$\Sigma = \{\textit{noms d'objets, noms de relations}\}$$

et qui sont “localement calculables” au sens que

- *leurs objets sont indexés par des données finies d'un type explicite qui dépend uniquement du vocabulaire Σ,*
- *les flèches entre deux tels objets forment toujours un ensemble fini calculable,*
- *la loi de composition des flèches est explicite et facilement calculable,*
- *toute flèche de $\mathcal{C}$*

  $$X \longrightarrow Y$$

  transforme toute flèche $Y' \to Y$ de but Y en une flèche $X' \to X$ de but X, par un procédé facilement calculable.

Conséquence : Tous les problèmes se réduisent constructivement à des problèmes d'engendrement de topologies sur de telles catégories.